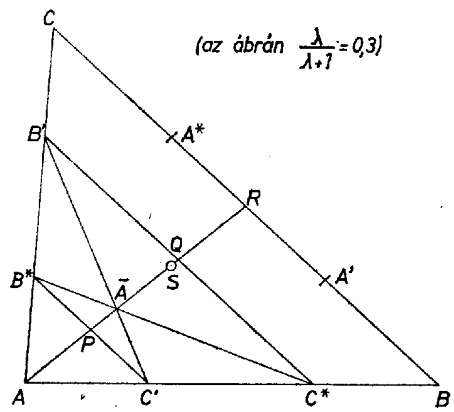
Jelöljük a H, H' háromszögek $1/\lambda$ arányú beírt háromszögeit H^*-gal, illetve $\overline{H}$-sal (olvasd: há fölül vonás). Megmutatjuk, hogy $\overline{H}$ a H^*-nak λ arányú beírt háromszöge, és H-ból az S centrumú

$$q=\frac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda^2+2\lambda+1}$$

arányú hasonlósági transzformációval is megkapható, ahol S a H súlypontja.

Jelöljük H^* csúcsait A^*-gal, B^*-gal, C^*-gal, a B^*C', $B'C^*$, BC szakaszok felezőpontjait rendre P-vel, Q-val, R-rel.



Mivel

$$\frac{AC'}{AB}=\frac{AC'}{AC'+C'B}=\frac{\lambda}{\lambda+1}=p,$$
$$\frac{AB^*}{AC}=\frac{AB^*}{AB^*+B^*C}=\frac{\lambda}{\lambda+1}=p,$$

azért az AB^*C' háromszög H-ból az A centrumú, p arányú hasonlósággal kapható meg, emiatt $B^*C'\|BC$, és $AP=p\cdot AR$. A B^*, C^* pontok származtatása miatt $C^*B=AC'$, $AB^*=B'C$, tehát $AB'C^*$ a H-ból az A centrumú, $(1-p)$ arányú hasonlósággal kapható meg, emiatt $B'C^*\|BC$, és $AQ=(1-p)\cdot AR$. Legyen $\bar{A}$ a PQ szakasznak az a pontja, amelyre

(2) $$\frac{P\bar{A}}{\bar{A}Q}=\frac{p}{1-p}=\lambda,$$

akkor az $\bar{A}$ centrumú, λ arányú hasonlóság P-t Q-ba, B^*C'-t $B'C^*$-ba viszi, így

$$\frac{B'\bar{A}}{\bar{A}C'}=\frac{\bar{A}C^*}{B^*\bar{A}}=\frac{1}{\lambda}.$$

Tehát $\bar{A}$ a H'-nek $1/\lambda$ arányú, és a H^*-nak λ arányú beírt háromszögében is csúcs, és rajta van H-nak AR súlyvonalán. (2) miatt

$$A\bar{A}=p\cdot AQ+(1-p)\cdot AP=2p(1-p)\cdot AR=\frac{2\lambda}{(\lambda+1)^2}AR,$$

tehát $\bar{A}$ az A-ból az S centrumú,

$$q=\frac{\bar{A}S}{AS}=1-\frac{A\bar{A}}{AS}=1-\frac{3\lambda}{(\lambda+1)^2}=\frac{\lambda^2-\lambda+1}{\lambda^2+2\lambda+1}$$

arányú hasonlósággal is megkapható.

Hasonlóan láthatók be a $\overline{H}$ másik két csúcsára vonatkozó állításaink is, előrebocsátott megjegyzésünk bizonyítását ezzel befejeztük.

A most bizonyított állítás szerint H_{n+1} a H_n-ből q arányú centrális hasonlósággal kapható meg, tehát H_{n+1} kerülete H_n kerületének q-szorosa. Eszerint a H_n háromszögek kerületei mértani sorozatot alkotnak, amelyben az első tag 1, és a szomszédos elemek hányadosa q, és $|q|<1$. Ismeretes, hogy ebben az (n elemű) sorozatban az elemek összege $(1-q^n)/(1-q)$, tehát a H_n háromszögek kerületeinek K összege, ha n minden határon túl nő,

$$K=\frac{1}{1-q}=\frac{(\lambda+1)^2}{3\lambda}\quad\text{hosszúságegység.}$$

Láttuk már, hogy egy háromszög λ arányú beírt háromszögének $1/\lambda$ arányú beírt háromszöge megegyezik a háromszög $1/\lambda$ arányú beírt háromszögének λ arányú beírt háromszögével. Emiatt a H_n' háromszögek kerületei is mértani sorozatot alkotnak, amelyben a szomszédos elemek hányadosa szintén q. A feladat *b)* állítása tehát következik abból a tényből, hogy az azonos hányadosú (végtelen) mértani sorok összegei úgy aránylanak egymáshoz, mint e sorok első tagjai.