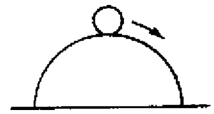
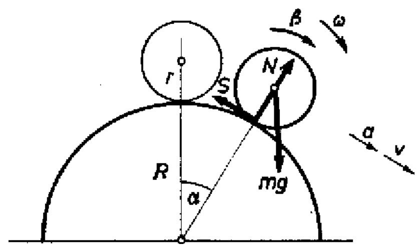
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1975. október 25-én rendezte 52. versenyét Budapesten és 8 vidéki városban az idén érettségizettek és középiskolai tanulók számára. A versenyzők 5 órai munkaidő alatt oldhatták meg a három feladatot és bármilyen segédeszközt használhattak. A versenyzők száma 367 volt. Ismertetjük a feladatokat és megoldásukat.

1. $R = 36$ cm *sugarú félhenger tetejéről egy* $r = 4$ cm *sugarú golyó gurul le (1. ábra). A súrlódási együttható* $\mu = 0{,}4$. *Hol csúszik meg a leguruló golyó?*



1. ábra

Megoldás. A kis golyó helyzetét az α szöggel határozzuk meg (2. ábra).



2. ábra

A golyóra ható erők: súlyerő (mg), súrlódási erő (S) és nyomóerő (N). A golyó tömegközéppontja $R + r$ sugarú körpályán mozog. A mozgásegyenlet a sugárirányú és érintőleges komponensekre (v a golyó tömegközéppontjának sebessége):

(1) $$mv^2/(R+r) = mg \cos \alpha - N,$$

(2) $$ma = mg \sin \alpha - S.$$

A forgó mozgás egyenlete (Θ a golyó tehetetlenségi nyomatéka, β a szöggyorsulása):

(3) $$\Theta \beta = S \cdot r.$$

A sebességet az energiatételből kaphatjuk meg (a megcsúszásig nincs súrlódási energiaveszteség; ω a szögsebesség):

(4) $$mg(R+r)(1-\cos \alpha) = (1/2)mv^2 + (1/2)\Theta\omega^2.$$

A csúszásmentes gördülés feltételei (részletesebben 1. KML 47(1973) 23.):

(5) $$a = r \cdot \beta,$$

(6) $$v = r \cdot \omega.$$

A megcsúszás határán

(7) $$S = \mu N.$$

A kapott hétismeretlenes egyenletrendszerből a megcsúszás helyzetét jellemző α szögre a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(3 + \frac{\Theta}{mr^2}\right) \cdot \cos \alpha - 2 = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\Theta}{mr^2} \cdot \sin \alpha.$$

Igen figyelemre méltó, hogy az eredmény teljesen független a sugaraktól, még azok aránya sem szerepel az eredményben. Tehát egy labdáról a sörétszem, vagy a sörétszemről a labda leguruláskor ugyanazon szöghelyzetben csúszik meg. Gömb esetében $\Theta/mr^2 = 0{,}4$, ekkor:

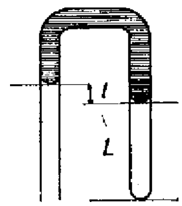
$$3{,}4 \cos \alpha - 2 = \frac{0{,}4}{\mu} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

Feladatunkban $\mu = 0{,}4$, ezért az egyenlet végső alakja:

$$12{,}56 \cos^2 \alpha - 13{,}6 \cos \alpha + 3 = 0.$$

Ennek megoldása $\cos \alpha = 0{,}7743$, $\alpha = 39{,}25°$.

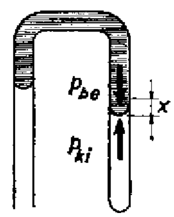
2. *A 3. ábra szerinti vékony csőben higany van, az elzárt légoszlop hossza L, a higanyszintek különbsége l. Mi történik, ha a higanyszintek véletlen lökés folytán kissé elmozdulnak?*



3. ábra

Megoldás. A rendszer stabilitását kell megvizsgálnunk. Legyen a külső légnyomás p_0. A lezárt csőben a határfelületen az elzárt levegő p_{ki} nyomással nyomja a higanyt felfelé, a lefelé ható nyomás az elmozdulás előtt $p_{be} = p_0 + l\gamma_{Hg}$.

Mozduljon el a határfelszín x távolsággal felfelé (4. ábra).

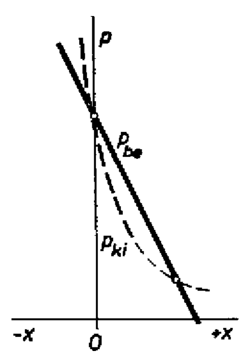


4. ábra

Ekkor a befelé szorító nyomás:

$$p_{be} = p_0 + (l - 2x)\gamma_{Hg},$$

tehát lineárisan csökkenő (5. ábra).



5. ábra

Meg kell vizsgálnunk, hogyan alakul ekkor az elzárt levegő p_{ki} nyomása. A Boyle–Mariotte törvény szerint:

$$(p_0 + l\gamma_{Hg})L = p_{ki}\,(L + x),$$

vagyis

$$p_{ki} = \frac{(p_0 + l\gamma_{Hg})L}{L + x}.$$

A levegő nyomása hiperbolafüggvény szerint csökken. A stabilitást az határozza meg, hogy p_{be} vagy p_{ki} csökken-e rohamosabban az $x = 0$ érték környezetében.

A p_{ki} differenciálhányadosa:

$$\frac{\mathrm{d}p_{ki}}{\mathrm{d}x} = -\frac{(p_0 + l\gamma_{Hg})L}{(L + x)^2}.$$

$x = 0$ esetében a differenciálhányados $-(p_0 + l\gamma_{Hg}/L$. A stabilitás feltétele, hogy ennek abszolút értéke nagyobb legyen, mint 2:

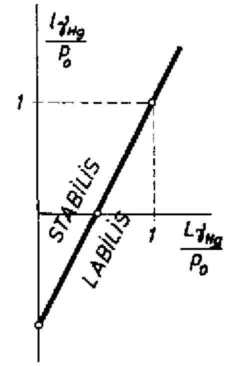
$$\frac{p_0 + l\gamma_{Hg}}{L} > 2,$$

vagy más alakban

$$L < \frac{p_0 + l\gamma_{Hg}}{2}.$$

Stabilis egyensúlyi helyzet esetében van a hiperbola és egyenes között egy másik metszéspont is, amely labilis egyensúlyt jelent. Ha a higany rezgést végez stabilis egyensúlyi helyzete körül, az amplitudónak nem szabad akkorának lennie, hogy idáig eljusson. Viszont, ha a kezdeti egyensúlyi helyzet labilis, akkor erős összenyomással, negatív x-nél el lehet jutni egy stabilis egyensúlyhoz.

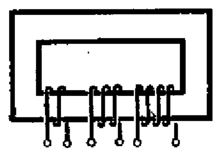
A 6. ábra az egyensúlyviszonyok áttekintésére szolgál.



6. ábra

Ezen az ábrán az (1,1) pontban átmenő, 2-es iránytangensű egyenes választja szét a stabilis és labilis egyensúlyi helyzeteket.

3. *Közös, teljesen zárt vasmagon (7. ábra) ugyanazon huzalból készült* 200, 300 *és* 400 *menetes tekercsek vannak. Hogyan kell ezeket összekapcsolni, hogy a keletkezett tekercsrendszer önindukciós együtthatója a lehető legkisebb legyen?*



7. ábra

Megoldás. Ha a tekercsek távol vannak és semmi csatolás sincs közöttük, akkor soros és párhuzamos kapcsolási törvényük olyan, mint az ellenállásoké. Itt azonban szoros csatolást tételeztünk fel, vagyis a vasmagban levő erővonalszám valamennyi tekercs számára közös.

Egyetlen tekercs önindukciós együtthatója arányos az n menetszám négyzetével: $L=n^2k$. Soros kapcsolású tekercs eredő induktivitása aszerint, hogy a menetirány egyező vagy ellentétes: $(n_1+n_2)^2\,k$, illetve $(n_1-n_2)^2\,k$. Eszerint soros kapcsolás esetében a $200+300-400$ összeállítás adja a legkisebb induktivitást.

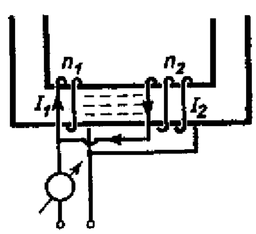
Bonyolultabb és meglepőbb a párhuzamos kapcsolás esete. Ha egy ohmos ellenállás nélküli tekercsre állandó feszültségkülönbséget kapcsolunk, akkor az áramerősség az idővel egyenes arányban növekszik és a növekedés sebessége arányos az alkalmazott feszültségkülönbséggel:

$$U=L\cdot \mathrm{d}I/\mathrm{d}t.$$

Az arányossági szorzó az induktivitás:

$$L=U:(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t).$$

Kapcsoljunk párhuzamosan n_1 és n_2 menetszámú tekercseket ugyanazon vasmagra, egyező menetiránnyal (8. ábra).



8. ábra

A vasmagban levő indukcióvonalak száma (az arányossági szorzót elhagyva):

$$N=n_1I_1+n_2I_2.$$

Az erővonalszám változásának sebessége:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=n_1\,\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}+n_2\,\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}.$$

Az első tekercsben indukált feszültség:

$$U_1=kn_1\cdot\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=kn_1^2\,\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}+kn_1n_2\,\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}.$$

Hasonlóan a második tekercsben indukált feszültség:

$$U_2 = kn_2 \cdot \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = kn_1 n_2 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + kn_2^2 \frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}.$$

A tekercsvégek össze vannak kötve, ezért a fenti két feszültség egyenlő: $U_1 = U_2$. Az egyenlőséget rendezve:

$$n_1(n_1 - n_2)\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = -n_2(n_1 - n_2)\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t},$$
$$n_1 \mathrm{d}I_1 = -n_2\,\mathrm{d}I_2,$$
$$n_1 \mathrm{d}I_1 + n_2 \mathrm{d}I_2 = \mathrm{d}N = 0.$$

Vagyis az erővonalak száma változatlan marad. De akkor a közös $U_1 = U_2$ feszültség is nulla. Az induktivitást definiáló egyenletünk szerint az önindukciós együttható nulla. Ez ellentétes menetiránynál is így van. Az n_2 menetszámú tekercsben indukált áram az eredeti árammal egyező irányban folyik bele az n_1-es tekercsbe. A valóságban a csatolás sohasem teljes és ez a furcsa eset tökéletesen nem alakul ki.

A verseny eredménye: A versenyen az első díjat nem osztották ki. Két egyenlő helyezésű **II. díjat** nyert *Szép Jenő* honvéd (a budapesti Veres Pálné Gimnáziumban érettségizett Kishonti Istvánné tanítványaként) és *Zimányi Gergely* (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t., tanára: Mihály István). **III. díjat** nyert *Virosztek Attila* (Szolnok, Verseghy F. Gimn., IV. o. t., tanára: Sebestyén István). Dicséretet kaptak jutalommal *Gulyás Mihály* (Orosháza, Táncsics M. Gimn., IV. o. t., tanára: Györös Gyula), *Molnár László* (Bp., Veres Pálné Gimn., IV. o. t., tanára: Pápai Tiborné), *Nagy Tamás* (Debrecen, Kossuth L. Gimn., IV. o. t., tanára: Farkas József) és *Zsigmond Géza* (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t., tanára Mihály István).