Görbénk centrálisan szimmetrikus az origóra, egy $(x,\ y)$ pontjával együtt ennek $(-x,\ -y)$ tükörképe is rajta van a görbén, hiszen erre teljesül $(-y) = (-x)^3 - (-x)$. Eszerint a görbe minden egyes érintőjének az origóra való tükörképe is érinti a görbét, a koordináta–rendszer egy $P_0(x_0,\ y_0)$ pontján át ugyanannyi érintője megy át a görbének, mint a $P_0'\ (-x_0,\ -y_0)$ ponton át. Elég tehát az $x_0 \geqq 0$ előírással az y tengelytől jobbra eső félsíkra és magára e tengelyre szorítkoznunk a vizsgálatban, a kapott eredmények tükrözéssel a sík minden pontjára megadják a választ.

P_0-on az adott görbe t abszcisszájú $(t,\ t^3 - t)$ pontjához húzott e érintő akkor és csak akkor megy át, ha P_0 koordinátái kielégítik e egyenletét:

$$y_0 - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x_0 - t)$$

(az iránytényező a görbénkhez tartozó $f(x) = x^3 - x$ függvény $f'(x) = 3x^2 - 1$ deriváltjának értéke a t helyen), eszerint a megfelelő t értékeket mint az innen átrendezéssel adódó

$$\varphi(t) = 2t^3 - 3x_0t^2 + (x_0 + y_0) = 0 \tag{1}$$

egyenlet valós gyökeit kaphatnánk meg.

Feladatunk kérdése szempontjából azonban elég azt tudnunk, hogy *hány* valós gyöke van (1)-nek adott P_0 esetében. Erre választ kapunk a $\varphi(t)$ függvény menetének, görbéje fordulópontjainak vizsgálata alapján. ($\varphi(t)$ görbéjét egy $t,\ u$ koordináta–rendszerben gondoljuk ábrázolva, de ez azonos is lehet az eredetivel.) Deriváltja eltűnik, ha

$$\varphi'(t) = 6t^2 - 6x_0t = 6t(t - x_0) = 0,$$

azaz a $t = 0$ és a $t = x_0$ $(\geqq 0)$ helyen.

Legyen egyelőre $x_0 > 0$. Ekkor $\varphi(t)$-nek két különböző (valós) helyen van szélső értéke, görbéjének két fordulópontja

$$F_1(0,\ \ x_0 + y_0) \qquad \text{és} \qquad F_2(x_0,\ x_0 + y_0 - x_0^3),$$

és mivel F_2 ordinátája kisebb, azért F_1 a $\varphi(t)$ maximumát, F_2 a minimumát ábrázolja. A $\varphi(t)$ görbe $t < 0$ esetén emelkedik, $0 < t < x_0$ esetén süllyed, $t > x_0$ esetén ismét emelkedik.

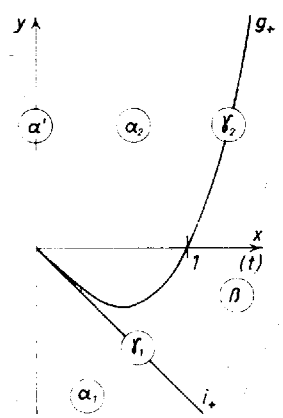
α) Ha mármost F_1 és F_2 ugyanazon az oldalán van a t tengelynek, más szóval F_1 és F_2 ordinátája 0-tól különböző és egyenlő előjelű, azaz

α_1*)* vagy $x_0 + y_0 < 0$, azaz $y_0 < -x_0$,

α_2*)* vagy $x_0 + y_0 - x_0^3 > 0$, azaz $y_0 > x_0^3 - x_0$,

akkor $\varphi(t)$ görbéje csak egyszer metszi át a t tengelyt – valamelyik emelkedő szakaszában –, ezért (1)-nek 1 valós gyöke van, és így P_0-on egyetlen érintője megy át az eredeti görbének. (Ti. az α_1 esetben a minimum után, valamiyen $t > x_0$ abszcisszán metszi át a t tengelyt $\varphi(t)$ görbéje, az α_2 esetben pedig a maximum előtt, valamilyen $t < 0$ abszcisszán.)

Az α_1 föltételt teljesítő P_0 pontok az $y = -x$ és $x > 0$ föltételekkel jellemzett i_+ félegyenes alatt vannak, az α_2 föltételt teljesítők pedig az eredeti görbének $x > 0$ íve, g_+ fölött (1. ábra).



1. ábra

α') Lényegében ugyanide vezet $x_0 = 0$ esete is, amikor $\varphi'(t)$ sehol sem negatív, $\varphi(t)$-nek nincs szélső értéke, görbéje állandóan emelkedik, és (1) így egyszerűsödik:

$$2t^3 + y_0 = 0,$$

amit bármilyen y_0 érték esetén csak egy t érték elégít ki.

β) Ha F_1 és F_2, a t tengely két oldalán adódik, vagyis a két ordináta 0-tól különböző és ellentétes előjelű:

$$x_0 + y_0 > 0 \text{ és } x_0 + y_0 - x_0^3 < 0$$

(természetesen ismét $x_0 > 0$), akkor $\varphi(t)$ görbéjének F_1 előtti, F_1 és F_2 közti, valamint F_2 utáni íve külön–külön átmetszi a t tengelyt, (1)-et 3 (különböző) t érték elégíti ki, tehát P_0-on az eredeti görbének 3 (különböző) érintője halad át. Az előbbiekhez hasonlóan ekkor P_0 az i_+ félegyenes fölött és a g_+ görbeív alatt, vagyis köztük van.

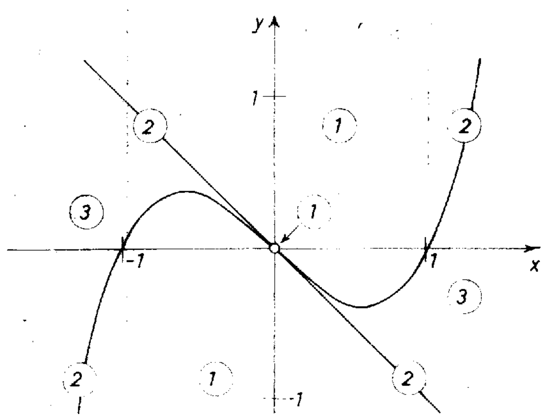
γ) Végül ha egyik fordulópont a t tengelyen adódik, akkor a másik alatta, ill. fölötte van, a tengelyen adódónak az ordinátája 0, azaz

$$\text{vagy} \qquad \gamma_1) \quad x_0 + y_0 = 0, \quad \text{vagy} \qquad \gamma_2) \quad x_0 + y_0 = x_0^3.$$

Eszerint a görbe a fordulópontban – mint az egyik emelkedő szakasz végpontjában – érinti a t tengelyt, a másik emelkedő szakaszával pedig átmetszi, tehát (1)-et két különböző t érték elégíti ki, és P_0-on két érintője megy át az adott görbének. A γ_2 esetben $y_0 = x_0^3 - x_0$, tehát P_0 a g_+ íven van, γ_1 esetében pedig az i_+ félegyenesen.

Vegyük észre, hogy a kiemelt szerepet játszó i_+ félegyenes, és az origóra vonatkozó i_- tükörképe együtt az adott görbének az origóbeli érintőjét alkotják, hiszen $f'(0) = -1$, másrészt hogy az origó görbénknek inflexiós pontja, mert $x < 0$ és $x > 0$ esetén egyaránt $f'(x) > -1$. Ezek szerint az i egyenes a g görbének az inflexiós érintője. (Könnyű belátni, hogy több inflexiós érintője nincs görbénknek.)

Mindezek szerint a g görbe pontjain és i inflexiós érintőjének pontjain 2 érintője megy át a görbének – kivéve a görbe inflexiós pontját, amelyen át csak egy, a kitüntetett érintő; egyébként bármely az y tengellyel párhuzamos egyenes g és i közti szakaszának belső pontjain 3 érintő, egyéb pontjain 1 érintő megy át (2. ábra).



2. ábra

Ezzel a sík minden pontjára vonatkozóan megadtuk a választ.

Lakner Péter (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A γ) eset két alesetében (1) így egyszerűsödik, ill. alakítható

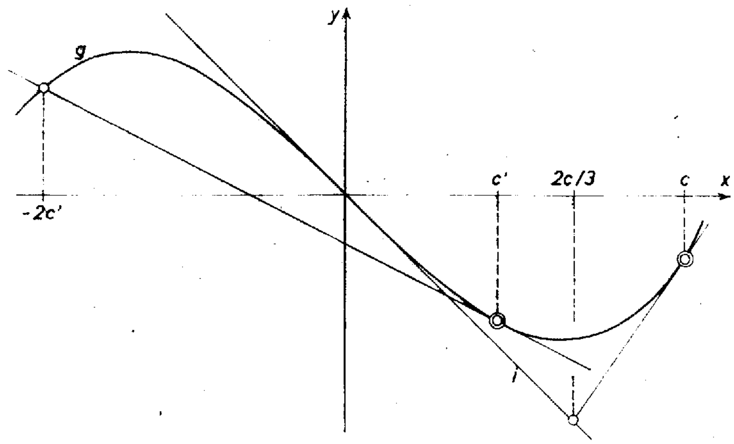
$$\gamma_1) \qquad 2t^3 - 3x_0t^2 = 2t^2\left(t - \frac{3}{2}x_0\right) = 0,$$

$$\gamma_2) \qquad 2t^3 - 3x_0t^2 + x_0^3 = 2(t - x_0)^2\left(t + \frac{x_0}{2}\right).$$

Az előbbi szerint az $(x_0, -x_0)$, $x_0 \neq 0$ ponton átmenő egyik érintő i, a másikra pedig az innen húzott érintő érintési pontjának abszcisszája $t = \dfrac{3}{2}x_0$.

Ez módot ad görbénk $\big(c,\ f(c)\big)$ $c \neq 0$ pontjában az érintő egyszerű megszerkesztésére: át kell mennie az inflexiós érintő $\left(\dfrac{2c}{3}, -\dfrac{2c}{3}\right)$ pontján.

Hasonlóan γ_2) szerint az $\big(x_0,\ f(x_0)\big)$ ponton átmegy a $-\dfrac{x_0}{2}$ abszcisszájú pontbeli érintő, tehát fordítva: a $\big(c,\ f(c)\big)$ pontbeli érintőt úgy is megkaphatjuk, hogy pontunkat összekötjük a $\big(-2c,\ f(-2c)\big)$ ponttal (3. ábra, 214. old.).



3. ábra

2. Meg lehet mutatni, hogy megállapításaink bármely $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ egyenletű görbére (ún. harmadfokú parabolára) érvényesek, ha az origó helyén a mindenkori inflexiós pontot, i helyén az ottani érintőt értjük.

3. A megoldások nagy része (1) átalakításával eljutott a harmadfokú egyenlet szokásos $x^3 + px + q = 0$ „redukált" alakjára ; ennek $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ diszkriminánsát mint x_0 és y_0 kifejezését sikerült szorzattá alakítaniuk és a két tényező előjelkombinációinak vizsgálatával értek célhoz. (Nem lényegesen különböző az $x^3+3px+2q = 0$ és p^3+q^2 diszkrimináns törtek látszólagos elkerülésével, hiszen nem szorítkozhatunk a p, q egész értékpárokra.) Ezzel lényegében az F. 1661. feladat megoldásában[1] bemutatott út fordítottját járták be.

[1] Milyen feltételt kell kielégíteniük a p, q együtthatóknak, hogy az $f(x) = x^3 + px + q$ függvény szélső értékei ellentett előjelűek legyenek ? Lásd K. M. L. 39 (1989) 129.