A bizonyítandó egyenlőség jobb oldalán $2n$ (különböző) elem $(n+k)$-adosztályú (ismétlés nélküli) kombinációjának a száma áll. Megmutatjuk, hogy a bal oldali összeg ugyanezt adja, a kombinációknak egy bizonyos szempont szerint osztályokba rendezése után – amikor minden kombinációt egy és csak egy osztályba sorolunk be –, mert az összeg tagjai éppen az egyes osztályokba sorolt kombinációk számai.

Gondoljuk, hogy elemeink egy iskola két párhuzamos osztályának, A-nak és B-nek tanulói, mindkét osztályban n tanuló van, és köztük $(n+k)$ jegyet kívánunk kiosztani valamilyen rendezvényre. A kiosztási lehetőségek száma – az A-ba vagy B-be tartozást nem tekintve – éppen (1) jobb oldala.

Azokban a kombinációkban (kiosztásokban), amelyekben az A osztály minden tanulója kap jegyet, a B-sek közül csak $(n+k)-n=k$ kap. Az ilyenek száma – mindjárt átalakítva célunk szerint:

$$\binom{n}{k}=1\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{0}\cdot\binom{n}{k}, \tag{2}$$

Ha az A-ból 1 tanulót – majd általában i számú tanulót – törlünk, akkor B-ből, 1-gyel – illetve i-vel – többben kapnak jegyet, és a kiosztási lehetőségek száma:

$$\begin{aligned}&\binom{n}{1}\cdot\binom{n}{k+1},\\ &\binom{n}{i}\cdot\binom{n}{k+i},\qquad (i=1,\,2,\,\ldots)\end{aligned} \tag{3}$$

mert az első tényező az A-beli törlési, a második a B-beli kiválasztási lehetőségek száma. A (3) kifejezésben felismerjük (1) bal oldalának általános tagját.

i-t csak addig van értelme növelnünk, míg a B-ben már mind az n tanuló kap jegyet, vagyis míg az A-ban már csak k tanuló kap, azaz míg itt $n-k$ tanulót töröltünk. Éppen ez az (1) bal oldalán i legnagyobb figyelembe veendő értéke, tehát (2) és (3) alatt felsoroltuk egyrészt (1) bal oldalának összes tagját, másrészt az $(n+k)$ jegy kiosztásának minden lehetőségét egyszer és csak egyszer. E két szám egyenlőségét akartuk bizonyítani.

Meszéna Géza (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzések. 1. Írhatnánk a bal oldali összegezésben $n-k$ helyett bármely nagyobb egész számot is, mert az így hozzágondolt tagok – szorzatok – egyik tényezője úgyis 0 lenne.

2. Általában az is igaz, hogy

$$\binom{M}{N}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{M-n}{N-i}.$$

ahol m, M, N természetes számok, és M nagyobb N-nél és m-nél.