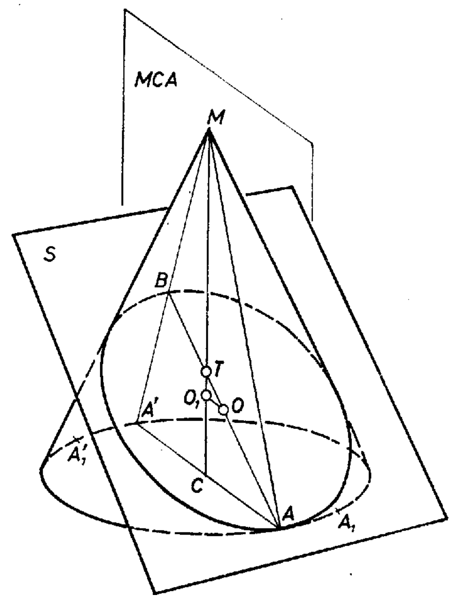
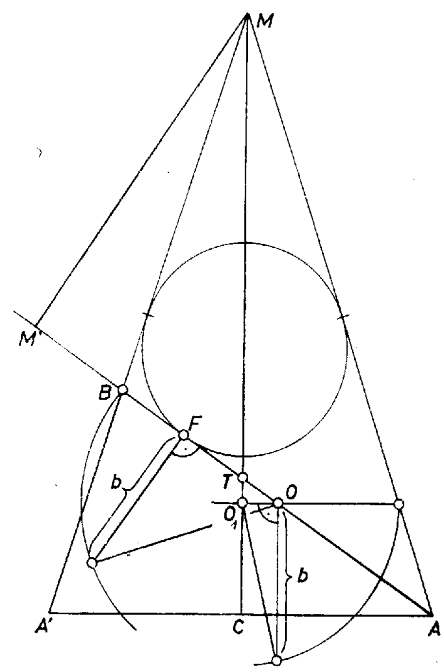
Megoldás. Legyen a kúp alapkörének centruma C, sugara r, a kúp csúcsa M, magassága m, továbbá az S metsző síknak az alapkörrel közös pontja A, a CM tengellyel való metszéspontja T. Számadatainkra tekintettel csak a $CT = m_1 < CM$ esetet tekintjük, egyelőre általában, ekkor S a kúpnak minden alkotóját metszi és – mint ismeretes a tankönyvből – a metszésvonal ellipszis. Így a kúp egyik része ellipszis alapú ferde kúp, ennek térfogatát V_1-gyel, az eredeti kúpét V-vel jelölve a $V_1 : (V - V_1) = \lambda$ arányt kell megállapítanunk.



1. ábra



2. ábra

Megmutatjuk, hogy S merőleges az MCA síkra, más szóval hogy az MCA sík közös szimmetriasíkja S-nek és a kúpnak, tehát a metszésvonaluknak is. Ha ugyanis az MC-n átmenő, S-re merőleges S_1 sík – ami közös szimmetriasíkja S-nek és a kúpnak – az alapkörből egy, az AA' átmérőtől különböző A_1A_1' átmérőt metszene ki, akkor S-nek még egy pontja lenne az alapkörön, ti. A-nak az S_1 re (az A_1A'-re) való tükörképe, ez pedig ki van zárva. Eszerint az S és MCA síkok AT metszésvonala az ellipszisnek szimmetriatengelye; mégpedig a nagytengelye, mert a metszésvonal ellipszis voltának a Dandelin-féle érintőgömbökkel való említett bizonyítása szerint ezen a tengelyen vannak a fókuszok, ti. ahol a két gömb S-et érinti.

Jelöljük a nagytengely másik, az MA' alkotón levő végpontját B-vel, az ellipszis középpontját O-val, B-hez közelebbi fókuszát F-fel. A λ arányszám kiszámításához szükségünk van egyrészt az ellipszis t területére, illetve $a = AB/2$ és b féltengelyeire, amelyekből $t = \pi ab$, másrészt a ferde kúp MM' magasságára, ahol M' az M-nek az AT egyenesen levő vetülete.

Legyen az ABA' háromszög AB-vel párhuzamos középvonala $CC'(=a)$. Ekkor egyrészt a párhuzamos szelők tételéből

$$BT = C'C\frac{TM}{CM} = a\frac{m-m_1}{m},$$

másrészt az ATC derékszögű háromszögből

$$TA = \sqrt{r^2+m_1^2}.$$

és ezekkel a $BT+TA=BA=2a$ egyenletből

$$a = \frac{m}{m+m_1}\sqrt{r^2+m_1^2}.$$

A kistengely felehosszát a $b^2=a^2-OF^2$ összefüggés alapján számítjuk abból, hogy F a ferde kúpba beírt gömbnek S-sel való érintkezési pontja, illetve a fentiek alapján az ABM háromszög beírt körének az AB oldalon levő érintési pontja

$$BF = \frac{1}{2}(BA+BM-AM), \qquad OF = a-BF = \frac{1}{2}(AM-BM) = \frac{1}{2}A'B,$$

és az $A'AB$ háromszögre a sinustételt alkalmazva

$$OF = \frac{1}{2}\frac{AB\sin BAA'\sphericalangle}{\sin BA'A\sphericalangle} = \frac{am_1}{m}\sqrt{\frac{r^2+m^2}{r^2+m_1^2}},$$

$$b^2 = a^2-OF^2 = \frac{a^2r^2(m^2-m_1^2)}{m^2(r^2+m_1^2)} = \frac{r^2(m^2-m_1^2)}{(m+m_1)^2} = r^2\frac{m-m_1}{m+m_1}.$$

Végül a ferde kúp magassága

$$MM' = MT\sin MTM'\sphericalangle = MT\sin CTA\sphericalangle = \frac{(m-m_1)r}{\sqrt{r^2+m_1^2}}.$$

Mindezek behelyettesítésével, majd felismerve az eredeti kúp térfogatképletét:

$$V_1 = \frac{\pi}{3}ab\cdot MM' = \frac{\pi r^2 m}{3}\left(\sqrt{\frac{m-m_1}{m+m_1}}\right)^3 = V\left(\sqrt{\frac{m-m_1}{m+m_1}}\right)^3,$$

azt látjuk, hogy λ csak m-től és m_1-től függ, r-től nem.

Számadatainkkal $r=13$, $m=39$, $m_1=39-30=9$, $V_1=V\cdot 0{,}4941$; a másik – a csonka – rész térfogata $V\cdot 0{,}5059$, tehát $\lambda = 0{,}4941 : 0{,}5059$. Másképpen: a felső (a csúcsot tartalmazó) rész térfogata az alsóénak 97,7 %-a, fordítva pedig 102,4 % az arányszám.

Összeállítva a következők dolgozatainak részeiből:

Máthé Sarolta (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)
Smohay Ferenc (Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn., IV. o. t.)
Breuer Péter (Eger, Gárdonyi G. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Más lehetőség az a, b, MM' szakaszok hosszának kiszámítására a CA, CM tengelyekkel kifeszített derékszögű koordináta-rendszerben B_1, O, O_1 (az O vetülete CM-re) meghatározása, majd az O_1 középpontú körmetszet sugara, ebben $2b$ a OO_1 távolságra levő húr. A megoldások többsége így jutott célhoz.

2. A feladat m és m_1 számadatai közelítő értékek a következő régi osztozkodási feladatra: értékes anyagból való kúp alakú test olyan síkmetszettel vágandó két egyenlő térfogatú részre, hogy a metszet érintse az alapkört. Helyes felosztásnál m_1-et valamivel kisebbre kellene venni. Az átmérő adatot csak a jobb elképzelés érdekében szerepeltette a szerkesztőség.