I. forduló

Kezdők (legföljebb I. osztályosok) részére

1. Az egy-egy cédulára felírt

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{5}{12},\ \frac{7}{12}$$

számoknak egy 3 sorra és 3 oszlopra osztott négyzet 9 kis mezején való elrendezéseit keressük két esetben, az alábbi követelmények szerint. Az első esetben

a) a középső sorban és a középső oszlopban álló 3–3 szám összege 1 legyen;

b) a két szélső sorban, a két szélső oszlopban és a két átló mentén álló 3–3 szám összege – tehát 6 összeg – egyezzék meg egymással;

c) az adott számok közül a két egyező az alsó sorban álljon. A második esetben az *a*) és a *b*) követelmény változatlan, a *c*) helyére pedig c') lép:

c') az adott számok közül a két egyező a középső sorban álljon.

Hány különböző elrendezés felel meg az I. esetben és hány a II. esetben? (Az elrendezés egymás utáni lépéseit indokolni kell!)

2. Bontsuk fel a teljes körívet az egymáshoz csatlakozó AB, BC, CD és DA ívekre. Bizonyítsuk be, hogy az AB és CD ívek felezőpontját összekötő húr merőleges a BC és DA ívek felezőpontját összekötő húrra!

3. Keressük meg az alábbi egyenlet összes megoldását pozitív egész számokban:

$$(x+2y)(3x+7y)=216.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy

$$1975^{1975}-1977^{1977}+1978$$

osztható 1976-tal!

5. Jelöljük az ABC háromszög A-ból kiinduló szögfelezőjének a BC oldallal való metszéspontját A_1-gyel és ennek az AB, valamint AC oldalra való tükörképét P-vel, Q-val. Húzzunk párhuzamost P-n át AC-vel, Q-n át AB-vel és legyen ezek metszéspontja R. Végül messe az A_1P egyenes AB-t D-ben, RQ-t F-ben, az A_1Q egyenes AC-t E-ben, RP-t G-ben.

Milyen idomot határoznak meg a D, E, F, G pontok? Mikor lesz ez az idom téglalap?

6. Írjuk fel a tízes számrendszerben azokat a számokat, amelyek a tizenegyes számrendszerben $a0b$, a kilences számrendszerben pedig $b0a$ alakban írhatók fel.

7. Ismerjük egy háromszög egyik csúcsát és a másik két csúcsból kiinduló szögfelezőinek a szemközti oldalakkal való metszéspontjait.

Szerkesszük meg a háromszöget!

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely x nemnegatív számra fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$x^3+4x+1>3x^2.$$

Haladók (legfeljebb II. osztályosok) részére

1. Az $ABCD$ téglalap AB és BC oldalának hossza rendre a, illetve b méter, ahol $a<b$. Az A csúcsból BD átlóra merőlegesen húzott egyenes BC-t E-ben, a C-ből BD-re merőlegesen húzott egyenes AD-t F-ben metszi. Mennyi az $AECF$ paralelogramma területe?

2. Oldjuk meg az $x^2+2|x|-x-2=0$ egyenletet.

3. A II/b osztályban matematikadolgozat írásnál az egyik feladat másodfokú egyenlet megoldása volt. Két tanuló, Péter és Pál figyelmetlenül másolt a tábláról, így már hiába oldották meg jól az általuk leírt egyenletet. Péter, aki az egyenlet állandó tagját írta hibásan, az $x_1=1$, $x_2=2$ eredményt kapta. Pálnál az elsőfokú tag együtthatója volt rossz, ő az $x_1=1$, $x_2=-4$ gyököket hozta ki.

Mi az eredeti egyenlet helyes megoldása?

4. Határozzuk meg azokat a háromszögeket, amelyek oldalainak hosszát a, b, c-vel jelölve, az a^2, b^2, c^2 hosszúságú szakaszok egy háromszög oldalait alkotják.

5. Adott szabályos nyolcszöghöz szerkesszünk olyan négyzetet, amelynek csúcsai a nyolcszög kerületén vannak, oldalainak hossza pedig kétszer akkora, mint a nyolcszög valamelyik oldala fölé szerkesztett szabályos háromszög magassága!

6. Egy szám jegyeit tetszőleges módon felcseréljük, majd az így kapott számot hozzáadjuk az eredetihez. Bizonyítsuk be, hogy így nem kaphatunk $999\dots9$-et (999 db 9-es)!

7. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x^3 + y^3 = 1$$
$$x^4 + y^4 = 1$$

8. Válasszunk ki az alábbi 10×10-es táblázatból 10 számot úgy, hogy minden sorból és minden oszlopból pontosan egy elem szerepeljen. Milyen választás esetén lesz a tíz szám összege a lehető legnagyobb?

1,	2,	3,	...	9,	10
11,	12,	13,	...	19,	20
– –	– –	– –	– –	– –	– –
81,	82,	83,	...	89,	90
91,	92,	93,	...	99,	100

II. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok) versenye

A) Az általános tantervű osztályok részére

1. Egy papírlapra 5 párhuzamos egyenest rajzoltunk, majd rájuk merőlegesen további 6 egyenest. Két szomszédos egyenes távolsága mind a két irányban ugyanannyi (1 cm). Megjelöljük az egyenesek 30 metszéspontját.

Ezek után hányféleképpen rajzolható meg egy olyan új egyenes, amely a megjelölt pontok közül pontosan 3-on megy át? (Vagyis az új egyenesen sem 3-nál több megjelölt pont nem lehet, sem 3-nál kevesebb.)

2. Mely háromszögekre teljesül a következő állítás? Megrajzolva a belső szögfelezők egyeneseit, s tekintve ezeknek a szemközti oldalakkal való metszéspontjait, az ezek által meghatározott új háromszög belső szögfelező egyenesei az eredeti háromszögnek is belső szögfelező egyenesei.

3. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre n^5+1 osztható (n^3+1)-gyel!

B) A szakosított matematika I. tantervű osztályok részére

1. Határozzuk meg a tízes számrendszerben azokat a háromjegyű számokat, amelyek (ugyanazokkal a számjegyekkel ugyanabban a sorrendben felírva) egy nem tízes alapú számrendszerben kétszer akkora számot jelentenek, mint a tízes számrendszerben.

2. Hányféleképpen lehet 3 piros, 3 fehér és 3 zöld golyót – egymás mellé – sorba rakni úgy, hogy bármely két egymás mellé kerülő golyó különböző színű legyen? (Az ugyanolyan színű golyókat nem lehet egymástól megkülönböztetni.)

3. Egy adott ABC háromszöghöz úgy akarjuk megszerkeszteni a köréje írható kör érintőjét az A csúcsban, hogy magát a kört nem szerkesztjük meg. Hogyan lehetséges ez?

Egy bizonyos – csupa különböző oldallal bíró – ABC háromszög esetében azt találtuk, hogy A, B és C csúcsában így előállított érintők olyan új háromszöget alkotnak, melynek szögei valamilyen sorrendben véve megegyeznek az ABC háromszög szögeivel. Mekkorák az ABC háromszög szögei?

C) A szakosított matematika II. tantervű osztályok részére

1. Legyenek a, b, n pozitív egész számok és $n\neq1$. Bizonyítsuk be, hogy n^a+1 akkor és csak akkor osztható n^b+1-gyel, ha az a páratlan számú többszöröse b-nek!

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 8×8-as sakktáblán egy tetszőleges mezőt letakarunk, akkor a fennmaradó 63 mező lefedhető 21 darab – egyenként három mezőt letakaró – L alakú idommal.

3. Szerkesszük meg a háromszöget, ha adott a köré írható körének, beírható körének és egyik hozzáírható körének középpontja.

(A háromszög hozzáírható körén a háromszög oldalegyeneseit érintő, de a háromszög által nem tartalmazott kört értjük.)

Haladók (legfeljebb II. osztályosok) versenye

A) Az általános tantervű osztályok részére

1. A p paraméter milyen értékeire igaz, hogy az

$$x^2+px+1=0$$

egyenlet mindkét gyöke 0 és 5 között van?

2. Az ABC háromszög AB oldalán fekvő C' pontra

$$AC':C'B=1:2,$$

AC oldalán levő B' pontra

$$AB':B'C=1:3.$$

A CC' és BB' szakaszok metszéspontja M. Az A és M pontokon átmenő egyenes milyen arányban osztja a BC oldalt?

3. Oldjuk meg az egész számok körében a

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{z}$$

egyenletet!

B) A szakosított matematika I. tantervű osztályok részére

1. Mely x, y természetes számokra lehet az x^2+y és $x+y^2$ számok mindegyike négyzetszám?

2. Adott a síkon egy egység kerületű sokszög. Igazoljuk, hogy a sokszög lefedhető $\dfrac{1}{4}$ sugarú körlappal!

3. Legfeljebb hány 16-nál nem nagyobb különböző pozitív egész számot lehet úgy megadni, hogy közülük akárhogyan választva hármat, azok nem lesznek páronként relatív prímek?

C) A szakosított matematika II. tantervű osztályok részére

1. Azonos a matematika I. tantervű osztályok 3. feladatával.

2. Legyenek a, b és c pozitív számok. Igazoljuk, hogy a, b és c hosszúságú oldalakkal akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha igaz a következő egyenlőtlenség:

$$(a+b)(b+c)(a+c)>a^3+b^3+c^3+4abc.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt[64]{1976}$ nem gyöke semmilyen egész együtthatós másodfokú egyenletnek!