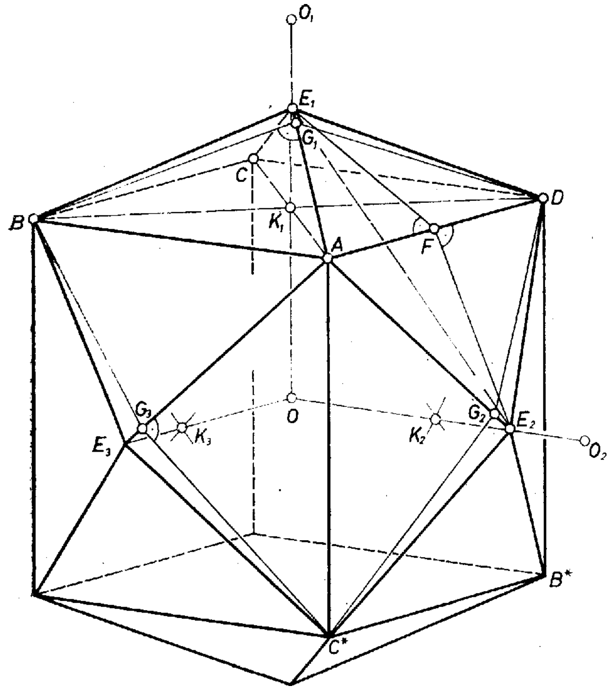
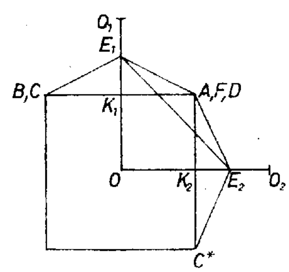
Legyen a kocka középpontja O, két lapja az $ABCD = N$ és az ADB^*C^* négyzet, ezek középpontja K_1, illetve K_2 és O-nak ezekre vett tükörképe a O_1 ill. O_2 (1. ábra).

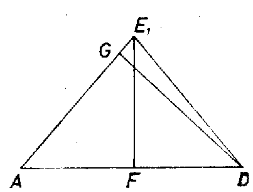


1. ábra

Így az OK_i egyenesek ($i = 1,\ 2$) a kocka laptengelyei. Mivel $AD = 1$, $OK_i = 1/2$ és $OO_i = 2 \cdot OK_i = 1$, azért a gömb sugarára kimondott korlátozás szerint $OK_i < r < OO_i$ és a vizsgálandó T test 6 új csúcsa közül egy-egy a K_iO_i szakasznak egy E_i belső pontja. Ezért T konvexsége alapján az ADE_i háromszögek a T-nek lapjai, mert minden más csúcsa az ADE_i síknak egyik oldalán van (2. ábra), hiszen a K_iO_i félegyenesen O_i, az E_i-ként meg nem engedett, legközelebbi pont, és A, D, O_1, O_2 nyilvánvalóan egy síkban vannak.



2. ábra



3. ábra

Így T lapjai négyesével egy-egy olyan szabályos gúla oldallapjai, melynek alapja a kocka egy lapja, és T örökli a kocka minden szimmetriáját, hiszen minden olyan forgatás és tükrözés, amely a kockát önmagába viszi át, ugyanezt teszi a 6 új csúcs együttesével.

Ezek szerint T-nek – bármely megengedett r mellett – csupán kétféle nagyságú lapszöge van: a kockából származó éleknél akkora, mint az AD élnél az ADE_1, és ADE_2, lapok szöge, a gúlaéleknél pedig akkora, mint az AE_1 élnél az AE_1D és AE_1B lapok szöge.

Az első lapszög egyenlő az E_1E_2F egyenlő szárú háromszög F-nél levő szögével – ahol F az AD él felezőpontja –, mert FE_1 is, FE_2 is merőleges AD-re. A második lapszögre vonatkozóan azt használjuk föl T szimmetriáiból, hogy szárlapjai, az AE_1D és AE_1B háromszögek, egymás tükörképei a kocka ACC^* átlós síkjára, ezért a D-ből és B-ből AE_1-re bocsátott merőlegesek talppontja közös. Ezt G-vel jelölve, a második fajta lapszöget a DBG egyenlő szárú háromszög G-nél levő szöge méri.

Ezek szerint a két lapszög akkor és csak akkor egyenlő, ha a DBG háromszög hasonló az E_1E_2F háromszöghöz, azaz ha

$$\frac{E_1F}{DG} = \frac{E_1E_2}{DB}. \tag{1}$$

Itt a bal oldal az ADE_1 háromszög kétféle magasságának aránya, ezért egyenlő a rájuk merőleges alapok arányának reciprokával, $\frac{AE_1}{AD}$-vel – itt speciálisan AE_1-gyel – , a jobb oldal pedig az E_1E_2O és DBA egyenlő szárú derékszögű háromszögek átfogóinak aránya, tehát egyenlő befogóik arányával, ami $\frac{E_1O}{DA} = E_1O = r$. Ezeket (1)-be beírva, négyzetre emelés után

$$AE_1^2 = AK_1^2 + K_1E^2 = \frac{1}{2} + \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = r^2,$$

és innen a lapszögek egyenlőségének keresett feltétele:

$$r = \frac{3}{4}.$$

Gál Péter (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. A lapszög nagysága ki is számítható. Bármely megengedett r mellett

$$E_1FE_2\sphericalangle = \varphi = 90^\circ + 2 \cdot E_1FK_1\sphericalangle,$$

és ehhez

$$\operatorname{tg} E_1FK_1\sphericalangle = \frac{E_1K_1}{K_1F} = 2r - 1,$$

így a meghatározott érték mellett

$$\frac{\varphi - 90^\circ}{2} = \operatorname{arctg}(2r-1) = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} = 26^\circ 34', \quad \varphi = 143^\circ 08'.$$