I. forduló

1. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának hossza 1 egység, az alap végpontjaiból kiinduló szögfelező hossza 1,2 egység. Számítsuk ki a háromszög szárának hosszát.

2. Adott két egymást metsző kör, metszéspontjaik A és B. Ezeket a köröket egy A-ból induló félegyenes a C és D pontokban, AB-re vonatkozó tükörképe pedig az E és F pontokban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $CD = EF$.

3. Egy n-tagú mértani sorozat tagjai pozitívak, összegük S, szorzatuk P, reciprokaik összege R. Határozzuk meg P-t n, S és R függvényeként!

4. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 6x + 1 = 0.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egész szám egy négyzetszám kétszeresénél egy négyzetszámmal kisebb, akkor az is igaz, hogy ez a szám egy négyzetszámnál egy négyzetszám kétszeresével kisebb. (Négyzetszámnak nevezzük az egész számok négyzetét.)

6. Egy kocka csúcsai közül négyet pirosra, négyet kékre festettünk. Hányféleképpen tehettük ezt, ha nem tekintjük különbözőknek azokat a színezéseket, amelyek megfelelő mozgatással egymásba vihetők át?

7. Legyen az $y(x)$ függvény értéke a legnagyobb olyan y szám, amelyre

$$x \cdot 2^y + (1-x) \cdot 2^{-y} = 1$$

teljesül, feltéve, hogy van ilyen y. Határozzuk meg ennek a függvénynek az értelmezési tartományát és értékkészletét.

8. Egy konvex síknégyszögről a következőket tudjuk:
a) Oldalainak mértékszáma természetes szám.
b) Kerülete 18 egység.
c) Minden oldalfelező merőlegese egy ponton megy át.
d) Egyetlen olyan csúcsa van, amelyből induló belső szögfelező átlót is felez.
e) Pontosan két egyenlő szöge van.
Milyen négyszögről van szó, és mekkora a területe?

II. forduló

A) A gimnáziumok általános tantervű osztályai, valamint a szakközépiskolák részére

1. Bizonyítsuk be, hogy a

$$P = \sin 5° \cdot \sin 15° \cdot \sin 25° \cdot \sin 35° \cdot \sin 55° \cdot \sin 65° \cdot \sin 75° \cdot \sin 85°$$

szorzat racionális számmal egyenlő!

2. Jelöljön p és q két különböző páratlan törzsszámot, továbbá jelöljenek a és b olyan pozitív egész számokat, amelyekre

$$a + b = q.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a^p + b^p$ nem lehet egyenlő semmilyen természetes számnak 1-nél nagyobb egész kitevőjű hatványával!

3. Vegyük fel valamely ABC háromszög AB oldalának belsejében tetszés szerint a P pontot, hasonlóképpen BC oldalának belsejében a Q, végül CA oldalának belsejében az R pontot.

Bizonyítsuk be, hogy ha APR, BQP, CRQ és PQR háromszögek nem mind egyenlő területűek, akkor e közül a négy háromszög közül nem a PQR háromszög területe a legkisebb!

B) A gimnáziumok szakosított matematika I. tantervű osztályai részére

1. Tükrözzük az ABC háromszög A csúcsán átmenő tetszőleges a egyenesre a B, C csúcsokat, és a kapott pontokon átmenő, a-val párhuzamos egyeneseket jelöljük b-vel, c-vel. Jelöljük a BC és a egyenesek metszéspontját P-vel, a CA és b egyenesekét Q-val, az AB, c párét pedig R-rel. Mutassuk meg, hogy ha a P, Q, R metszéspontok léteznek, egy egyenesen vannak.

2. Ismeretes, hogy ha az $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ polinom együtthatóinak abszolút értéke legfeljebb 1, akkor a polinom minden gyökének abszolút értéke 2-nél kisebb.

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\delta < 2$ valós számhoz megadható olyan, a feltételeket kielégítő polinom, amelyiknek van δ-nál nagyobb abszolút értékű gyöke.

3. Úthálózatot akarunk építeni 51 tábor, $T_1, T_2, \ldots, T_{51}$ között a következő feltételek mellett:

a) minden út két tábort kössön össze, és közben más tábort nem érinthet;

b) az úthálózat mentén bármely táborból bármely táborba el lehessen jutni, de csak egyféleképpen.

Elő szeretnénk írni azt is, hogy az egyes táborokból hány út induljon ki. Ismeretes, hogy ha az úthálózat eleget tesz az a) és b) feltételeknek akkor

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{51} = 100, \tag{1}$$

ahol u_i a T_i táborból induló utak száma ($i = 1, 2, \ldots, 51$). Igaz-e, hogy ha az $u_1, u_2, \ldots, u_{51}$ pozitív egész számokra teljesül (1), akkor van olyan úthálózat, amelyben T_i-ből u_i út indul ($i = 1, 2, \ldots, 51$)?

*

1. Egy 9×10-es sakktáblát 45 darab 2×1-es (azaz a sakktábla két mezőjéből álló) téglalappal lefedünk. Ezután minden egyes téglalapot egyik négyzetének középpontja körül $90°$-kal elforgatunk. Lefedhetik-e az így elforgatott téglalapok a sakktáblát?

2. Az $ABCD$ paralelogramma AB, ill. AD oldalán felvesszük az E, ill. F pontokat. Az ED és FB szakaszok metszéspontja legyen G. Mutassuk meg, hogy az $ADGB$ és $CEGF$ (konkáv) négyszögek területe egyenlő.

3. Jelentsen n pozitív egész számot és legyen az 1976^n tízes számrendszerben felírt alakja $a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1$. Bizonyítsuk be, hogy

A) ha $4 \le 4r \le n$, akkor nem lehet az $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_{4r}$ számjegyek mindegyike 0;

B) az $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ összeg n növekedésével minden határon túl növekszik.

*

1. Melyik az a legnagyobb természetes szám, ami nem állítható elő n darab (nem feltétlenül különböző) összetett természetes szám összegeként?

2. Az egységsugarú kör AB húrjának két oldalára egy-egy négyzetet akarunk szerkeszteni úgy, hogy két-két szomszédos csúcs a húron, két-két csúcs pedig a körvonalon legyen. Felvehető-e az AB húr úgy, hogy a két négyzetoldal különbsége 1 legyen?

3. A természetes számok halmazából elhagyjuk azokat a számokat, amelyeknek tízes számrendszerbeli előállításában szerepel a 0 számjegy. Bizonyítsuk be, hogy a megmaradó számok közül véve akárhánynak a reciprokát, ezek összege kisebb, mint 30.

C) A gimnáziumok szakosított matematika II. tantervű osztályai részére

1. Tükrözzük az ABC háromszög A csúcsán átmenő tetszőleges a egyenesre a B, C csúcsokat, és a kapott pontokon átmenő, a-val párhuzamos egyeneseket jelöljük b-vel, c-vel. Jelöljük a BC és a egyenesek metszéspontját P-vel, a CA és b egyenesekét Q-val, az AB, c párét pedig R-rel. Mutassuk meg, hogy ha a P, Q, R metszéspontok léteznek, egy egyenesen vannak.

2. Ismeretes, hogy ha az $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ polinom együtthatóinak abszolút értéke legfeljebb 1, akkor a polinom minden gyökének abszolút értéke 2-nél kisebb.

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\delta < 2$ valós számhoz megadható olyan, a feltételeket kielégítő polinom, amelyiknek van δ-nál nagyobb abszolút értékű gyöke.

3. Legyen f olyan, minden valós számon értelmezett, mindenütt folytonos függvény, amelyre tetszőleges x szám mellett igaz az, hogy $f\big(f\big(f(x)\big)\big) = x$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = x$.