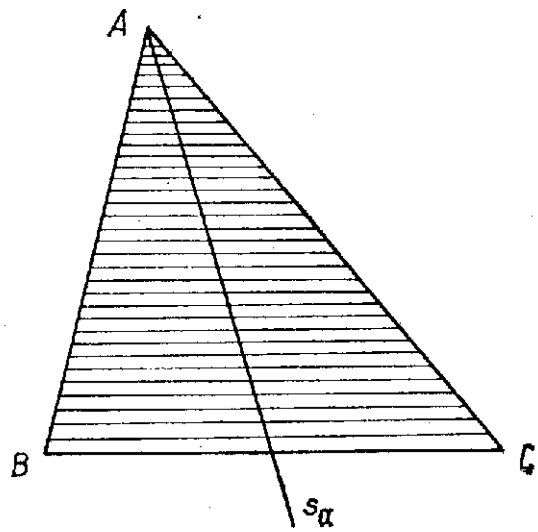
Háromszögvonal súlypontjának meghatározása

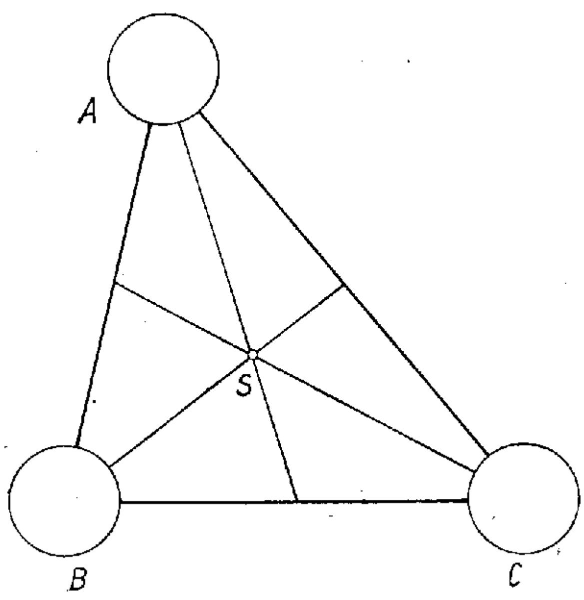
Dozent Dr. E. Schröder, Universität Dresden

Az iskolából jól ismert feladat egy háromszög súlypontjának a meghatározása. Ezt úgy végezzük el, hogy berajzoljuk a háromszögbe a súlyvonalakat, ezek egy pontban, a háromszöglap S súlypontjában metszik egymást. A szerkesztést az indokolja, hogy egy háromszögben a csúcsokat a szemben fekvő oldalfelezőpontokkal összekötő szakaszok valóban (mechanikai értelemben is) súlyvonalai a (homogén) háromszöglapnak. Ha ugyanis egy gondolati kísérletben a lapot a háromszög egyik oldalával párhuzamos, keskeny sávokra bontjuk, akkor mindezen sávok felezőpontjai éppen az ehhez az oldalhoz tartozó súlyvonalra esnek.



Egy síkidom–lap két súlyvonalának a metszéspontja éppen a lap súlypontja. Ellenőrzésképpen kivághatunk egy kartonra rajzolt háromszöget, majd az S pontjával vízszintesen ráhelyezhetjük egy fölfelé tartott tű hegyére.

Ez a súlypontszerkesztés akkor is helyes, ha háromszögön olyan, három egyenlő tömegű testből álló rendszert értünk, amelyek súlypontjai a háromszög A, B és C csúcspontjaiban helyezkednek el.

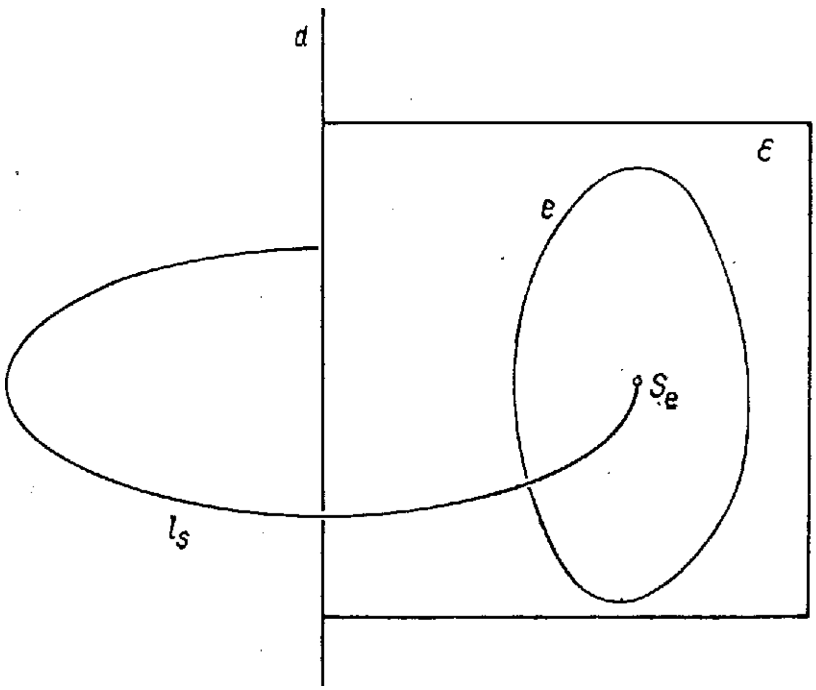


Egészen más meggondolásokra van szükségünk, ha az ABC háromszögben csak a kerület súlypontját akarjuk meghatározni. Ekkor az ABC háromszögvonalról és annak S_e súlypontjáról beszélhetünk. Ehhez megközelítően úgy készíthetünk modellt, hogy három egyforma vastag, ugyanabból az anyagból készült fémrudat háromszög alakú keretté hegesztünk össze. Most könnyen látható, hogy azok az egyenesek, amelyek a háromszög egyik csúcsát a szemközti keretoldal felezőpontjával kötik össze, a keretnek általában nem súlyvonalai. Így aztán ezeknek az egyeneseknek a metszéspontja sem lesz súlypontja a háromszögvonalnak.

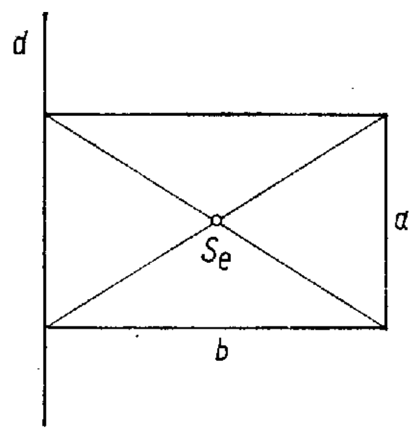
I. Egy általános háromszögvonal súlypontjának analitikus megközelítéséhez egy könnyen érthető tétel ajánlkozik. Ez a tétel így szól: Forgassunk meg egy egyszerű, zárt, kettős pont nélküli (azaz önmagát nem metsző) e görbét egy olyan d tengely körül, amely a görbe ε síkjában fekszik, de e-t nem metszi. Az így keletkezett forgásfelület F felszínét megadja az a szorzat, amelyet egyrészt e-nek l_e ívhosszából, másrészt az e görbe S_e súlypontja által egy körülfordulás alatt megtett l_s út hosszából kapunk, vagyis

(1) $$F = l_e \cdot l_s.$$

Próbáljuk ki ezt a tételt egy ismert példán!



1. Legyen az e zárt görbe olyan téglalap, amelynek a kerülete $l_e = 2\,(a + b)$. (Sokszögek oldalait és azok hosszát a következőkben ugyanúgy jelöljük: a, b, c, d, …-vel.) A téglalap a hosszúságú oldalának egyikét helyezzük a d forgástengelyre, és forgassuk meg d körül az e téglalapvonalat.



Így hengerfelületet kapunk. A származtató görbe l_e ívhossza most $2\,(a+b)$. A négyszögvonal súlypontja $\frac{b}{2}$ távolságra van a tengelytől, ezért a súlypont által egy körülfordulás közben leírt út hossza

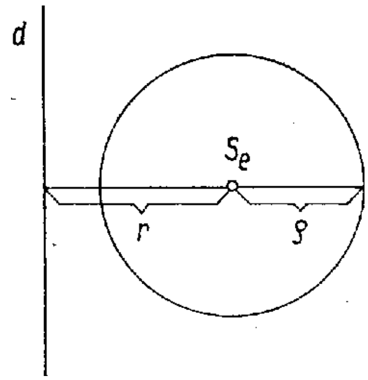
$$l_s = 2\pi\frac{b}{2} = \pi b.$$

A keletkezett henger F felszíne (1) szerint

$$F = l_s \cdot l_e = \pi b \cdot 2(a + b) = 2\pi ab + 2\pi b^2.$$

A fent idézett tétel tehát, amint azt az ember elvárja, az alap- és a fedőlap valamint a henger palástja területének összegét szolgáltatja.

2. Legyen a megforgatandó e görbe olyan körvonal, amely nem metszi az ε síkban fekvő d egyenest. Ha ε-t d körül egyszer körülforgatjuk, akkor e egy tórusznak nevezett gyűrűfelületet ír le. Most ennek a tórusznak a felszínét akarjuk meghatározni.



Legyen e sugara ϱ, akkor $l_e = 2\pi\varrho$. Nyilvánvalóan e középpontja egyben az S_e súlypontja is az e-nek. Ha S_e-nek d-től mért távolsága r, és $r > \varrho$, akkor az így keletkezett forgásfelület felszíne (1) szerint

$$F = 2\pi r \ldots 2\pi\varrho,$$

vagyis

$$F = 4\pi^2 r\varrho.$$

3. Most térjünk rá a cikk elején kitűzött problémára. Hogy az ABC háromszögvonal S_e súlypontját meghatározzuk, helyezzük az a oldalt a d forgástengelyre. Ha a háromszögvonalat megforgatjuk a d tengely körül, akkor olyan forgásfelület keletkezik, amely két, közös alapkörű forgáskúpból áll. Az alapkör sugara éppen a háromszög h_a magassága. Eszerint az A csúcs által leírt körvonal hossza

$$s = 2\pi\ h_a.$$

Amint azt barkácsolás közben már biztosan észrevettük, forgáskúp palástját kiteríthetjük síkba, és ekkor körcikk keletkezik. Ha ennek a körcikknek a sugara r, az íve s hosszú, akkor a körcikk területe

$$K = \frac{1}{2} rs.$$

Ha ezt a képletet a mi két kúpfelületünkre alkalmazzuk, ezek területére

$$K_1 = \pi h_a b \qquad \text{és} \qquad K_2 = \pi h_a c$$

adódik. Mivel $h_a = c\,\sin\beta = b\,\sin\gamma$, ezt így is írhatjuk:

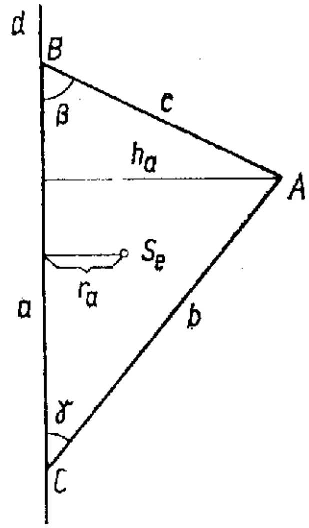
$$K_1 = \pi\, bc\,\sin\beta \qquad \text{és} \qquad K_2 = \pi\, bc\,\sin\gamma,$$

az egész forgásfelület felszíne pedig

(2) $$F = K_1 + K_2 = \pi bc(\sin\beta + \sin\gamma).$$

Továbbá ismerjük a megforgatott vonal hosszát:

(3) $$l_e = a + b + c.$$



Jelöljük r_a-val az S_e súlypont távolságát az a-ra helyezett d forgástengelytől, akkor az egy körülfordulás alatt az S_e által megtett út

$$l_s = 2\pi r_a. \tag{4}$$

Ha most a fent idézett tételt alkalmazzuk és eközben figyelembe vesszük (1), (2), (3), (4)-et, a következő egyenletet kapjuk:

$$\pi\, bc(\sin\,\beta + \sin\,\gamma) = 2\pi r_a(a+b+c). \tag{5}$$

Itt r_a a keresett mennyiség. Fejezzük ki (5)-ből r_a-t:

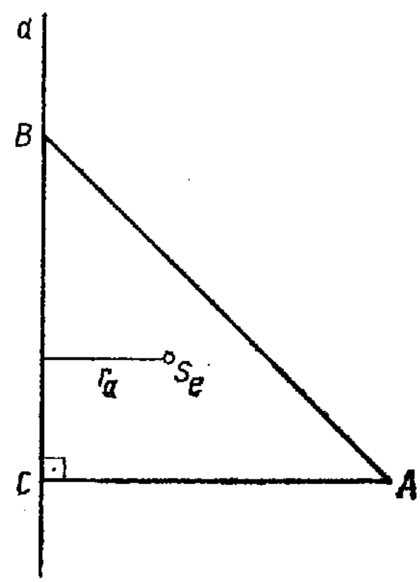
$$r_a = \frac{bc(\sin\,\beta + \sin\,\gamma)}{2(a+b+c)}. \tag{6}$$

Ebből az eredményből rögtön leolvashatjuk az S_e súlypontnak a másik két háromszögoldaltól mért távolságát is. Ciklikus felcseréléssel

$$\begin{aligned} r_b &= \frac{ac(\sin\,\alpha + \sin\,\gamma)}{2(a+b+c)}, \\ r_c &= \frac{ab(\sin\,\alpha + \sin\,\beta)}{2(a+b+c)} \end{aligned} \tag{7}$$

adódik.

Ezzel számításunk végére értünk. Mutassuk még meg, hogy az így kapott S_e pont általában nem esik egybe a háromszöglap súlypontjával. Annak az általános érvényű állításnak, hogy S_e és S azonos, a megcáfolására elegendő egyetlen ellenpéldát találnunk. Tekintsük azt az esetet, amikor $a = b = 1$, $c = \sqrt{2}$.



Az oldalak ilyen választásával a szögek:

$$\beta = 45^\circ, \qquad \gamma = 90^\circ.$$

(6) alkalmazásával azt nyerjük, hogy

$$r_a = \frac{1+\sqrt{2}}{2(2+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{8}$$

Minthogy a háromszög súlyvonalai $1:2$ arányban osztják egymást, azért a háromszöglap S súlypontjának az a oldaltól mért távolsága $\frac{1}{3}$. A két súlypont, S és S_e tehát nem azonos. Csupán egyenlő oldalú háromszög esetében esik egybe a háromszöglap és a háromszögvonal súlypontja.

Paul Guldin (1577–1643) svájci matematikus egy művében szerepelt először az a tétel, amelyet itt a háromszögvonal súlypontjának meghatározására használtunk. A szakirodalomban ezt a tételt az első Guldin–szabálynak nevezik. A bizonyításra itt nem térhetünk ki.

II. Végezetül megmutatjuk, hogyan lehet egy ABC háromszögvonal S_e súlypontját megszerkeszteni. Itt az igen fontos, hogy két „súlyvonalat" lehetőleg egyszerűen meg tudjunk keresni. Most meghatározzuk az a oldal P felezőpontján átmenő s_p „súlyvonalat". Ehhez ajánlkozik, hogy megszerkesztünk még egy $X \in s_p$ pontot, mégpedig azt, amelyik a b, ill. c oldal Q, ill. R felezőpontját összekötő egyenesen fekszik. E célból rendeljünk a Q ponthoz m_b, az R ponthoz m_c tömeget úgy, hogy ezek aránya

(9) $$m_b : m_c = b : c$$

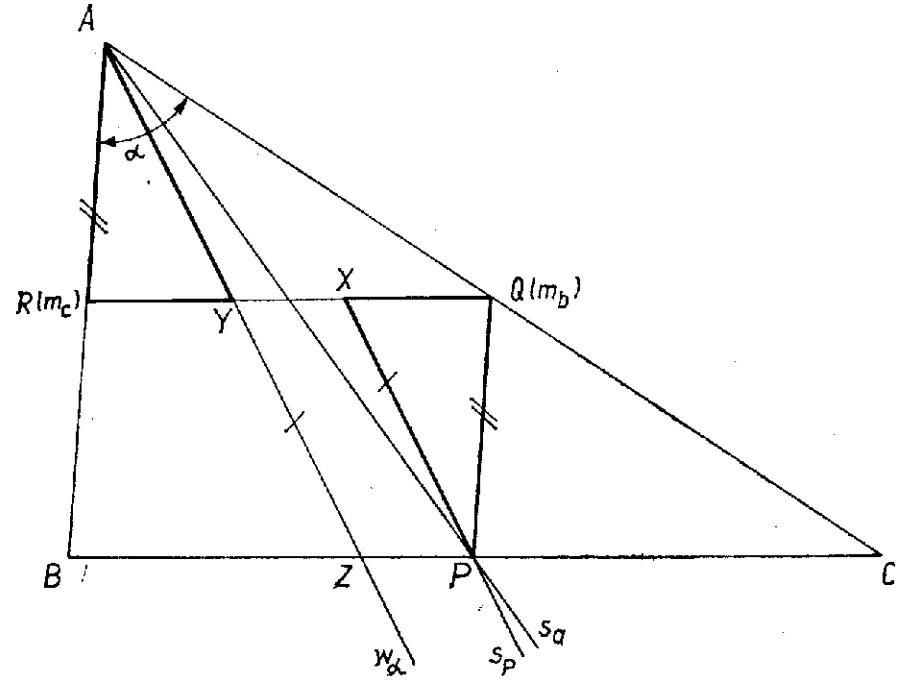
legyen. A keresett X pontnak meg kell egyeznie az m_b és az m_c tömegből álló rendszer súlypontjával. Az emelőszabály szerint ha egy két karú emelő egyensúlyi helyzetben van, akkor az emelőkarok hossza a végpontjukba helyezett tömegekkel fordítottan arányos. Az $X \in s_p$ pontra tehát a következő aránynak kell teljesülnie:

(10) $$|RX| : |QX| = m_b : m_c.$$

(9) szerint most az $X \in s_p$ meghatározása egy geometriai feladatra vezethető vissza. (10)-zel ekvivalens ugyanis az

(11) $$|RX| : |QX| = b : c$$

feltétel, ez pedig azt sugallja, hogy a w_α szögfelezőt használjuk fel a szerkesztéshez. Rajzoljuk be az ABC háromszögbe az α szög w_α szögfelezőjét, és jelöljük ennek a szemközti oldallal, ill. a (QR) egyenessel alkotott metszéspontját Z-vel, ill. Y-nal.



Most alkalmazzuk azt a tételt, amely szerint a szögfelező a szemközti oldalt az őt közrefogó oldalak arányában osztja ketté. Ezt a tételt a mi esetünkre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$b : c = |CZ| : |BZ|.$$

Minthogy a (BC) egyenes párhuzamos a (QR) egyenessel, azért alkalmazhatjuk a párhuzamos szelők tételét. Eszerint

$$|CZ| : |BZ| = |QY| : |RY|,$$

így

(12) $$|QY| : |RY| = b : c.$$

Most a következőt állítjuk: Ha P-n át párhuzamost húzunk w_α-val, akkor ez a (QR) egyenest a keresett X pontban metszi; más szóval, ez a P-n átmenő, ω_α-val párhuzamos egyenes éppen a háromszögvonal egyik súlyvonala.

Bizonyítás: A szerkesztés szerint

$$PQX \triangle \cong ARY \triangle .$$

Ezért

$$|QX| = |RY| \qquad \text{és} \qquad |QY| = |RX|.$$

Innen a következő arányt kapjuk:

(13) $$|QX| : |RY| = |RX| : |QX|.$$

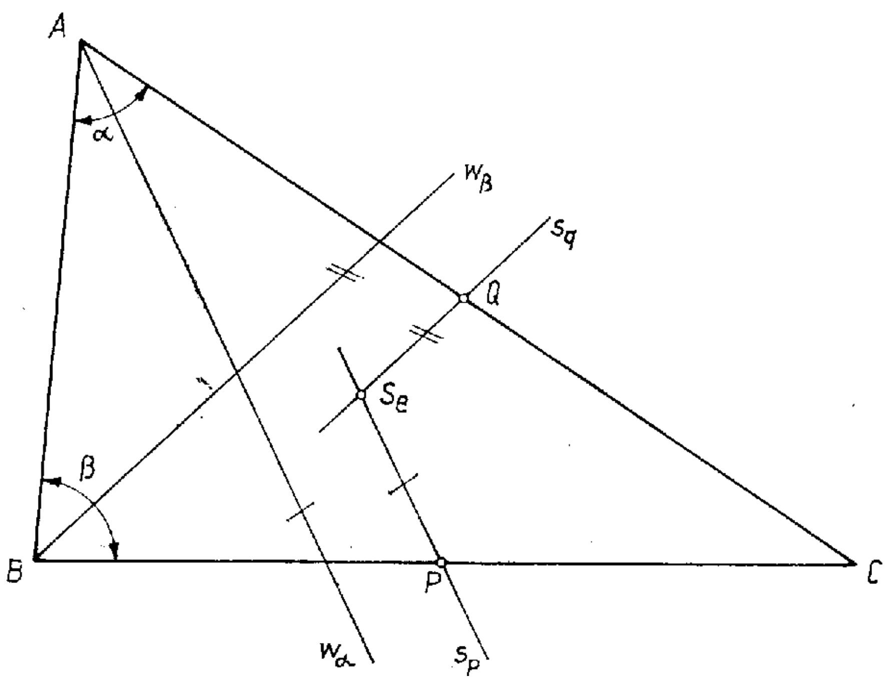
(12) és (13) alapján ebből következik
$$|RX| : |QX| = b : c$$
és

(14) $$|RX| : |QX| = m_b : m_c.$$

(14)-gyel beláttuk, hogy a fenti szerkesztés teljesíti a (10), és így a (11) feltételt. Ahogy itt az s_p súlyvonalat megszerkesztettük, ugyanúgy szerkesztjük meg a Q-ból és az R-ből kiinduló súlyvonalat is. Az ABC háromszögvonal keresett súlypontja éppen két, így megadott súlyvonal metszéspontja.

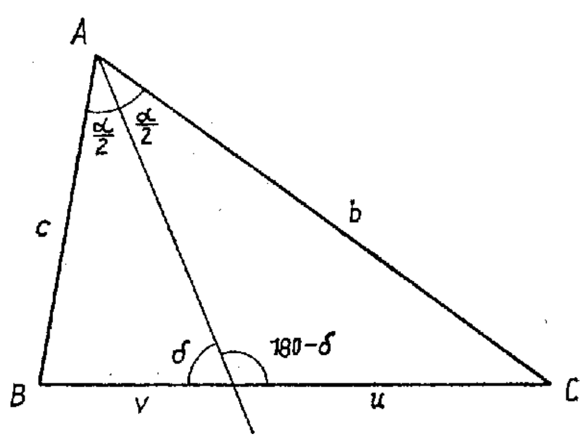
Mindezt összefoglalva: Egy háromszögvonal S_e súlypontját a következő eljárással szerkesztjük meg:

Az ABC háromszögben megszerkesztjük a három szögfelezőt: w_α, w_β, w_γ-t, valamint a három oldal, a, b és c felezőpontját, P, Q, R-et. Ekkor a P-n át w_α-val, a Q-n át w_β-val és az R-en át w_γ,-val párhuzamosan húzott három egyenes, s_p, s_q, ill. s_e egy pontban metszi egymást. Ez az S_e pont a háromszögvonal súlypontja.



Függelék:

A fenti cikkhez felhasználtuk a következő segédtételt: Egy háromszög bármelyik szögfelezője a vele szemközti oldalt az őt közrefogó oldalak arányában osztja.



Bizonyítás: Alkalmazzuk a részháromszögekre a szinusz–tételt! Eszerint

(*) $$\frac{\sin\delta}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{c}{v}, \quad \frac{\sin(180^\circ - \delta)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{b}{u}.$$

Mivel $\sin\delta = \sin(180^\circ - \delta)$, azért (*)-ból következik, hogy

$$\frac{c}{v} = \frac{b}{u}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{b}{c} = \frac{u}{v}.$$