A cikksorozat célja

Ezzel a cikkel egy, két éven át tartó cikksorozatot kezdünk meg. A kézzelfogható cél a Pell-féle egyenletek megoldása lesz; ezeket az egyenleteket a későbbiekben fogjuk ismertetni.

Mindkét év folyamán három cikk jelenik meg. A cikkek némi előkészítést adnak, majd néhány feladat következik. Ha olvasóinknak most kellene a Pell-féle egyenleteket megoldani, akkor valószínűleg csak igen nehezen tudnának célt érni. Látni fogjuk azonban, hogy a feladatsorozat segítségével úgy lehet a megoldást – önmagukban is érdekes – részekre felbontani, hogy ezekből minden nehézség nélkül eljuthatunk az egyenletek megoldásához. A cikkben azt is látni fogjuk majd, hogy miképpen kapcsolhatjuk össze a matematikának egy-egy ágát valamely kitűzött cél elérése érdekében.

Tudnivalók

A feladatok megoldására pontversenyt nem írunk ki, de a legjobb megoldók között könyvutalványokat sorsolunk ki. A megoldásokat kérjük a lap megjelenését követő hónap 20-ig a szerkesztőség címére (1443 Budapest, Postafiók 129) beküldeni. A megoldásokat nem szükséges külön lapra írni, de mindig írják ki, hogy melyik feladat megoldása következik. Bár a feladatok egymásra épülnek, nem szükséges mindegyiket megoldani. Egyes feladatokat úgy is megoldhatunk, hogy elfogadjuk az előző feladatok állításának helyességét. Mindegyik cikkben ismertetni fogjuk az előző cikk feladatainak a megoldásait. Az új feladatok kitűzésénél figyelembe vesszük a beküldött megoldások tapasztalatait is; éppen ezért kérjük megoldóinkat, hogy a feladatokkal kapcsolatban minden véleményt, felmerült kérdést írjanak meg.

A Pell-féle egyenlet

Pell-féle egyenleteknek nevezik az

$$x^2 - D \cdot y^2 = 1 \tag{P}$$

alakú egyenleteket, ahol D egy rögzített természetes szám, amelyik nem négyzetszám; továbbá az egyenletnek olyan megoldásait keressük, amelyekben x és y mindegyike egész szám.

Tetszőleges megengedett D érték mellett azonnal megadhatjuk a (P) egyenletnek két – úgynevezett *triviális* – megoldását. Az $y = 0$ esetben ugyanis x választható $(+1)$-nek vagy (-1)-nek; és mindkét esetben megoldást kaptunk. Jegyezzük meg, hogy négyzetszám esetében nyilván csak a triviális megoldás lehetséges. Ha ugyanis $D = A^2$, akkor $1 = x^2 - A^2y^2 = (x - Ay)\,(x + Ay)$ csak úgy lehet egész számokra való felbontás, ha a két tényező megegyezik, amiből azonnal következik, hogy $y = 0$.

Ha y különbözik 0-tól, akkor minden egyes megoldáshoz három másik adható meg; annak megfelelően, hogy y helyébe $(-y)$-t vagy x helyébe $(-x)$-et írunk, vagy mindkettőt megtesszük. Egy-egy ilyen „megoldásnégyes” között biztosan szerepel olyan, amelyben x és y mindegyike pozitív. Nézzünk ilyen megoldásokat, megadott D mellett.

D	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15
A legkisebb pozitív y	2	1	4	2	3	1	6	3	2	180	4	1
A hozzá tartozó x	3	2	9	5	8	3	19	10	7	649	15	4

Láthatjuk, hogy ha D nem négyzetszám, akkor mindig találtunk megoldást; noha ez néha elég nagy számokból álló pár volt. Természetesen ebből nem következtethetünk még arra, hogy mindig létezik is megoldás, de „sejthetjük”.

Azt is megnézhetjük, hogy egy rögzített D mellett találhatunk-e több megoldást. Például a $D = 3$ esetben:

Pozitív y (növekedve)	1	4	15	56	209	780	2911	10 864
Megfelelő x érték	2	7	26	97	362	1351	5042	18 817

Láthatjuk, hogy a megoldások rohamosan nőnek, de mégis úgy tűnik, hogy mindig találunk újabb és újabb megoldást.

Mindenekelőtt gondoljuk meg, mit jelent egy, a megoldást jelentő a, b számpár megtalálása; amelyre tehát $a^2 - Db^2 = 1$. Eszerint $(a/b)^2 - D = 1/b^2$. Ha mármost b „elég nagy” – mint például $D = 13$ esetében –, akkor eszerint a/b négyzete „majdnem D”, vagyis a/b „nagyon közel van” $\sqrt{D}$-hez. $D = 13$ esetén 9 tizedesre: $\sqrt{13} = 3{,}605\,551\,275$, míg $649/180 = 3{,}605\,555\,556$. De még kisebb b esetében is viszonylag jó közelítést kapunk. Az előbbi táblázatból a következő értékeket kapjuk (9 tizedesre):

D	$\sqrt{D}$	a/b
2	1,414 213 562	1,500 000 000
3	1,732 050 808	2,000 000 000
5	2,236 067 977	2,250 000 000
6	2,449 489 743	2,500 000 000
7	2,645 751 311	2,666 666 667
8	2,828 427 125	3,000 000 000
10	3,162 277 660	3,166 666 667
11	3,316 624 790	3,333 333 333
12	3,464 101 615	3,500 000 000
13	3,605 551 275	3,605 555 556
14	3,741 657 387	3,750 000 000
15	3,872 983 346	4,000 000 000

A másik táblázatból $D = 3$-hoz tartozó törtek:
$2/1 = 2{,}000\,000\,000$; $7/4 = 1{,}750\,000\,000$; $26/15 = 1{,}733\,333\,333$; $97/56 = 1{,}732\,142\,857$; $362/209 = 1{,}732\,057\,416$; $1351/780 = 1{,}732\,051\,282$; $5042/2911 = 1{,}732\,050\,842$; $18\,817/10\,864 = 1{,}732\,050\,810$.

Láthatjuk, hogy a kapott törtek a megadott (irracionális) számot jól közelítik. Irracionális számoknak racionálissal való közelítését approximációnak nevezik (s a matematikának ezzel foglalkozó ágát approximációelméletnek). Először is tehát jól approximáló törteket fogunk keresni, és majd ezek közül választjuk ki azokat, amelyek még a többletfeltételeket is kielégítik.

I. sorozat (Approximáció)

Elnevezések, jelölések

$[a,\ b)$ azoknak az x valós számoknak a halmazát jelöli, amelyekre $a \leq x < b$. Ezt a halmazt balról zárt, jobbról nyílt intervallumnak nevezik, mert az intervallum bal oldali végpontja hozzátartozik a halmazhoz, a jobb oldali nem.

$[x]$ jelöli az x valós szám egész részét; vagyis azt a legnagyobb egész számot, amelyik nem nagyobb x-nél.

$\{x\}$ jelöli az x törtrészét; amelyet az $\{x\} = x - [x]$ összefüggéssel értelmezünk. Nyilvánvaló, hogy a törtrész nem negatív és kisebb 1-nél (csak egész számok törtrésze 0).

Egy α valós számot irracionálisnak nevezünk, ha nem állítható elő két egész szám hányadosaként. Ezt másképpen úgy is fogalmazhatjuk, hogy p és q egész számokra, ha $q \neq 0$, akkor $p - q \cdot \alpha$ is különbözik 0-tól.

A 0-t nem tekintjük természetes számnak.

Feladatok

1. Legyen α tetszőleges valós és n tetszőleges természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\left[0, \frac{1}{n}\right),\ \left[\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\right),\ \ldots,\ \left[\frac{n-1}{n},\ 1\right)$$

intervallumok között van legalább egy olyan, amelybe a

$$\{0 \cdot \alpha\},\ \{1 \cdot \alpha\},\ \{2 \cdot \alpha\},\ \ldots,\ \{n \cdot \alpha\}$$

számok közül legalább kettő esik.

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges α valós számhoz és n természetes számhoz létezik olyan $q \leq n$ természetes szám és p egész szám, hogy

$$|p - q \cdot \alpha| < 1/n.$$

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges α valós számhoz és n természetes számhoz létezik olyan $q \leq n$ természetes szám és p egész szám, amelyekre

$$|p/q - \alpha| < 1/q^2 \qquad \text{és} \qquad |p/q - \alpha| < 1/n.$$

4. Legyen adott egy α irracionális szám, egy k természetes szám, valamint $q_1,\ \ldots,\ q_k$ természetes számok és $p_1,\ \ldots,\ p_k$ egész számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik olyan q természetes szám és p egész szám, amelyre

$$|p/q - \alpha| < 1/q^2 \quad \text{és} \quad |p/q - \alpha| < |p_i/q_i - \alpha|, \quad \text{ahol} \quad 1 \leq i \leq k.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges α pozitív irracionális számhoz létezik végtelen sok olyan pozitív nevezőjű különböző p_i/q_i tört, amelyre

$$0 < |p_i/q_i - \alpha| < (1/q_i)^2.$$