Első feladat. *Legyen $a > c \geq 0$, $b > 0$. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő összefügést:*

$$ab^2\left(\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(a-c)^2}\right)=a-b. \tag{1}$$

I. megoldás. A feltételek szerint a nevezőben szereplő kifejezések 0-tól különbözők, így a kifejezéseknek mindig van értelme. (1)-ben b-nek első és második hatványa fordul elő, így tekinthetjük b-re vonatkozóan másodfokú egyenletnek. Redukáljuk 0-ra:

$$2a\frac{a^2+c^2}{(a^2-c^2)^2}b^2+b-a=0.$$

Feltételeink szerint b ennek pozitív gyöke. Mivel a másodfokú tag együtthatója és a konstans tag ellenkező előjelű, a másodfokú egyenletnek egy pozitív és egy negatív gyöke van. Eszerint az adott összefüggés pontosan akkor áll fenn, ha

$$\begin{aligned}b&=\frac{-1+\sqrt{1+8a^2(a^2+c^2)/(a^2-c^2)^2}}{4a(a^2+c^2)/(a^2-c^2)^2}=\\&=\frac{(a^2-c^2)\left(c^2-a^2+\sqrt{(a^2-c^2)^2+8a^2(a^2+c^2)}\right)}{4a(a^2+c^2)}=\\&=\frac{(a^2-c^2)\left(c^2-a^2+\sqrt{9a^4+6a^2c^2+c^4}\right)}{4a(a^2+c^2)}.\end{aligned}$$

Itt a négyzetgyökös kifejezés $(3a^2+c^2)$-tel egyenlő, mert ez pozitív, és ennek a négyzete áll a gyökjel alatt. A 0-tól különböző $2(a^2+c^2)$-tel egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$b=\frac{a^2-c^2}{2a}\qquad\text{vagy}\qquad 2ab=a^2-c^2.$$

Ez, mint láttuk, ugyanakkor teljesül, mint a feladatban szereplő összefüggés, tehát annak egyszerűbb alakja.

Megjegyzések. 1. A nyert összefüggésből az is látható, hogy $a \geq 2b$.

2. Többen c^2-re vonatkozóan tekintették másodfokú egyenletnek az adott összefüggést. Ezen az úton kicsit bonyolult számítás vezet el a fenti eredményhez.

II. megoldás. Az (1) összefüggésből az $a > c \geq 0$ feltétel folytán vele egyenértékű összefüggést kapunk, ha $(a^2-c^2)^2$-nel megszorozzuk mindkét oldalt. Jelöljük (a^2-c^2)-et átmenetileg d-vel, ekkor c^2-et d-vel fejezve ki $a^2+c^2=2a^2-d$, s így a következőt kapjuk:

$$4a^3b^2-2ab^2d=ad^2-bd^2,$$

a bal oldalon

$$2ab-\frac{bd}{2a}$$

négyzetének a-szorosát kapjuk, ha a két oldalhoz $b^2d^2/4a$-t adunk:

$$a\left(2ab-\frac{bd}{2a}\right)^2=\frac{b^2d^2}{4a}+ad^2-bd^2=\frac{1}{4a}(b^2d^2+4a^2d^2-4abd^2)=\frac{1}{4a}(2ad-bd)^2.$$

Szorozzunk $4a$-val és redukáljunk 0-ra. Ekkor a keletkező kifejezés szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned}(4a^2b-bd)^2-(2ad-bd)^2&=(4a^2b+2ad-2bd)(4a^2b-2ad)=\\&=4a\big((a^2+c^2)b+a(a^2-c^2)\big)(2ab-a^2+c^2).\end{aligned}$$

Az első tényező az $a > c \geq 0$ feltétel miatt pozitív, így a szorzat akkor 0, ha

$$2ab-a^2+c^2=0. \tag{2}$$

Ez az összefüggés tehát akkor és csak akkor teljesül, ha (1) fennáll.

Megjegyzés. A (2) összefüggést tekinthetjük másodfokú egyenletnek a-ra vonatkozóan. Ennek is egy pozitív és egy negatív gyöke van. Így az $a > 0$ feltétel szerint

$$a=b+\sqrt{c^2+b^2}.$$

Ez az összefüggés is ekvivalens tehát az (1) összefüggéssel. Nem szoktuk egyszerűbbnek tekinteni (2)-nél pl. a benne fellépő négyzetgyökvonás miatt, ez azonban végső soron ízlés kérdése csak.

A nyert eredmény érdekes abból a szempontból, hogy mutatja: az adott feltételek mellett az (1) összefüggésben bármelyik két mennyiség egyértelműen határozza meg a harmadikat. Mint láttuk, a és b megadása esetén még az $a \geq 2b$ feltételnek is kell teljesülnie.

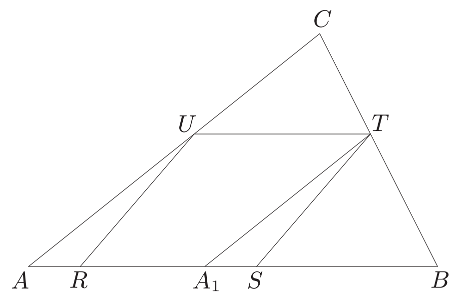
Második feladat. *Igaz-e a következő állítás: „Egy konvex sokszögbe írt minden négyszöghöz van olyan, a sokszögbe írt rombusz, hogy a négyszög valamelyik oldala nem nagyobb mint a rombusz oldala."*

Egy négyszöget akkor mondunk egy sokszögbe írtnak, ha minden csúcsa a sokszög határán van.

Megoldás. A feladatban megfogalmazott állítás nem igaz. Ennek belátására elég megadni egy sokszöget, amelybe írható négyszög úgy, hogy minden oldala nagyobb, mint bármelyik beírt rombusz oldala.

Sokszögnek olyan egyenlőszárú háromszöget választunk, amelyiknek a szárai kisebbek a harmadik oldalnál. Megmutatjuk először, hogy minden ebbe beírható rombusz oldala kisebb egy, a legnagyobb oldal felénél kisebb d távolságnál.

Általában, egy háromszögbe beírt négyszöghöz van a háromszögnek olyan oldala, amelyikre két négyszögcsúcs esik. Essék az ABC háromszögbe írt $RSTU$ rombusz R, S csúcsa az AB oldalra, legyen $URS\sphericalangle \leq 90°$ és válasszuk a háromszög betűzését úgy, hogy R közelebb legyen A-hoz, mint S, egybe is eshet vele. Húzzunk T-ből párhuzamost AC-vel, messe ez AB-t A_1-ben (1. ábra).



1. ábra

Ekkor az A_1BT háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, és $AA_1 = UT = RS$, így

$$AB = RS + A_1B = RS + \frac{A_1B}{ST} \cdot ST.$$

Mivel a jelölést úgy választottuk, hogy $URS\sphericalangle \leq 90°$, így $A_1ST\sphericalangle = 180° - TSB\sphericalangle = 180° - URS\sphericalangle \geq 90°$, tehát $ST < A_1T$, kivéve ha R és A, s így egyben S és A_1 is egybeesik. Továbbá $ST = RS$. Ezeket felhasználva

$$AB \geq RS\left(1 + \frac{A_1B}{A_1T}\right) = RS\left(1 + \frac{AB}{AC}\right),$$

azaz

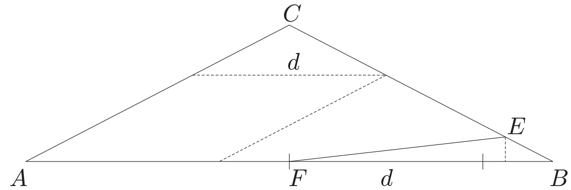
$$RS \leq \frac{AB}{1 + \dfrac{AB}{AC}} = \frac{1}{\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}}.$$

Ez akkor a legnagyobb, ha AB és AC a háromszög két legnagyobb oldala, és akkor is kisebb a legnagyobb oldal felénél, kivéve, ha $AB = AC \geq BC$.

Ezzel fenti állításunkat igazoltuk: ha $AB > AC = BC$, akkor semelyik beírt rombusz oldala sem nagyobb, mint

$$d = \frac{1}{\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}}, \text{ ami kisebb, mint } \frac{1}{2}AB.$$

Azt kell még megmutatnunk, hogy írható az ABC háromszögbe olyan négyszög, amelyiknek mindegyik oldala nagyobb d-nél. Válasszuk a négyszög csúcsainak az AB oldal F felezőpontját, A-t, C-t, továbbá a BC oldalnak egy olyan E pontját, amelyiknek a merőleges vetülete AB-n d-nél nagyobb távolságra esik F-től (2. ábra). Ekkor a négyszög minden oldalának a merőleges vetülete AB-n nagyobb d-nél, tehát az oldalak is nagyobbak. Ezzel a feladatban megfogalmazott állítást megcáfoltuk.



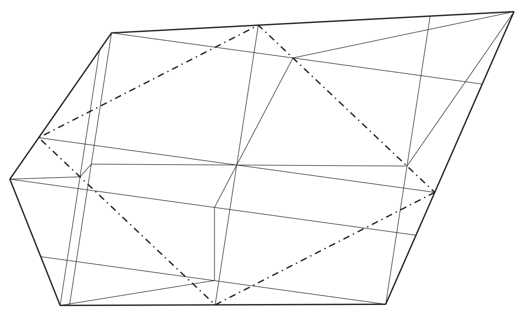
2. ábra

Megjegyzések. 1. A fenti meggondolás azt is mutatja, hogy a rombusz oldalára talált felső korlát elérhető, ha a rombusz csúcsa egybeesik a két legnagyobb oldal közös csúcsával.

2. Többen felvetették a kérdést, vajon írható-e minden konvex sokszögbe rombusz. A feladat szempontjából nem lényeges ez a kérdés, hiszen a megfogalmazott állítást cáfoltuk. Ha a most feltett kérdésre tagadó lenne a válasz, az mindössze egy más természetű ellenpéldára vezetne.

Nem nehéz azonban látni, hogy ez az eset nem léphet fel, sőt tetszés szerinti irányhoz beírható olyan rombusz, amelynek egyik átlója ezzel az iránnyal párhuzamos. Valóban, a sokszög adott iránnyal párhuzamosan húzható szelőinek a felezőpontjai egy törtvonalon helyezkednek el. Húzzunk ugyanis minden csúcson át az iránnyal párhuzamos szelőt. Ezek trapézokra és általában két vagy egy, esetleg 0 háromszögre bontják a sokszöget. A háromszögbeli szelők felezőpontjai egy súlyvonalon, a trapézbeliekéi a párhuzamos oldalak felezőpontjait összekötő szakaszon helyezkednek el.

Az eljárást megismételve az adott irányra merőleges iránnyal is, a keletkezett két törtvonal közös pontja olyan lesz, hogy azon át az adott iránnyal párhuzamost és arra merőlegest húzva ezek egy rombusz csúcsait metszik ki a sokszög határából (3. ábra).



3. ábra

Egy versenyző más meggondolással azt is megmutatta, hogy tetszés szerinti irányt adva meg, olyan beírt rombusz is létezik, amelyiknek az egyik oldalpárja adott irányú.

Harmadik feladat. *Képezünk egy számsorozatot a következő képzési szabály szerint:*

$$a_0 = 5, \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$45 < a_{1000} < 45{,}1. \tag{4}$$

Megoldás. Könnyű látni, hogy a sorozat pozitív, sőt növekedő tagokból áll, hiszen $a_0 = 5$ pozitív, és ha egy a_n tag pozitív, a következő nagyobb nála a pozitív $1/a_n$ értékkel. A növekedés mértékére jó közelítést kapunk, ha a sorozat elemeinek négyzetét vizsgáljuk:

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}.$$

Ha ezt $n = 0, 1, 2, \ldots, (k-1)$-re felírjuk és összeadjuk, akkor a bal oldalon a_1^2-től a_k^2-ig szerepelnek a tagok, a jobb oldalon pedig fellép a_0^2-tól a_{k-1}^2-ig a megfelelő összeg. Így az egyenlő tagokat a két oldalról elhagyva, azt kapjuk, hogy

$$a_k^2 = a_0^2 + 2k + \sum_{n-0}^{k-1} \frac{1}{a_n^2}. \tag{5}$$

Ez $k = 1000$-re azt adja, hogy

$$a_{1000}^2 = 2025 + \sum_{n-0}^{999} \frac{1}{a_n^2} = 45^2 + \sum_{n-0}^{999} \frac{1}{a_n^2} > 45^2. \tag{6}$$

Ezzel a kívánt alsó becslést meg is kaptuk.

A felső becsléshez, mivel $45{,}1^2 = 2034{,}01$, elég azt megmutatni, hogy a (6)-ban szereplő 1000-tagú összeg kisebb, mint 9,01. Mivel a sorozat elemei pozitívak és növekednek, így az egymás utáni tagok négyzetei reciprok értékének az összegét nagyobbítjuk, ha mindegyik tagot a legkisebb indexűvel, vagy annál kisebb számmal helyettesítjük.

Válasszuk szét az összeget az első 100 és a maradó 900 tag összegére. Mivel (5) alapján

$$a_{100}^2 > 225,$$

így azt nyerjük, hogy

$$\sum_{n-0}^{999} \frac{1}{a_n^2} = \sum_{n-0}^{99} \frac{1}{a_n^2} + \sum_{n-100}^{999} \frac{1}{a_n^2} < \frac{100}{a_0^2} + \frac{900}{a_{100}^2} < \frac{100}{25} + \frac{900}{225} = 4 + 4 = 8.$$

Ezzel a kívántnál valamivel jobb felső becslést kaptunk.

Megjegyzések. A megoldásban alkalmazott meggondoláshoz hasonlóan okoskodhatunk az eredeti képzési szabály alapján is, amint ezt többen is tették. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$a_{n+k} = a_n + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{n+k-1}} > a_n + \frac{k}{a_n}.$$

Ennek alapján azonban lényegesen nagyobb, közel egy egységnyire eső korlátok közé sikerült csak szorítani a versenyzőknek a_{1000}-et.

2. Egy elektronikus zsebszámológép 6,5 perc alatt kiszámította az a_{1000}-t és a 45,0245458 értéket adta. A feladat állításának bizonyításához ezen az eredményen túl a számítási hiba megbecslése is szükséges volna.