Görbe inflexiós pontjának fogalmát az x^3 függvény görbéjéhez az $x = 0$ abszcisszájú pontban fektetett érintő példáján ismertük meg a tankönyvből. Itt az érintő maga az x tengely, és ha x növekedve halad át a 0 értéken, akkor a görbe az érintő alsó partjáról áthajlik a felső partjára. Ezt így is mondhatjuk: tekintsük a görbe és az inflexiós pontbeli érintő ugyanazon abszcisszájú pontjaira nézve az ordinátákat, ezek különbsége $x < 0$ esetén negatív, $x > 0$ esetén pozitív. Ezt az előjelváltozást tekintjük egy tetszőleges $f(x)$ függvénygörbe inflexiós pontja és inflexiós érintője jellemző tulajdonságának; pontosabban így: $[u, f(u)]$, akkor inflexiós pontja az $y = f(x)$ görbének, ha véve az u-beli érintő

$$y = f(u) + f'(u)(x - u)$$

egyenletét, az

$$fix) - \big[f(u) + f'(u)(x - u)\big] = g(x)$$

különbség előjele az u helyen áthaladva megváltozik [magán az u helyen értelemszerűen $g(u) = 0$ a különbség értéke]. – Természetesen csak differenciálható f-ekre gondolunk.

Az előjelváltozás azt jelenti, hogy $g(x)$ görbéje az u helyen áthaladva áttér az x tengely alsó partjáról a felsőre vagy a felsőről az alsóra. Tehát ez a görbe u előtt is, utána is emelkedik, illetve előtte is, utána is süllyed. Eszerint – mivel f-fel együtt g is differenciálható – $g'(x)$ az u után ugyanolyan jelű, mint volt u előtt.

Mármost ha az u hely egy bizonyos környezetében

$$g'(x) = f'(x) - f'(u) > 0, \qquad x \neq u,$$

ez azt jelenti, hogy akár $x < u$, akár $x > u$, a derivált értéke nagyobb, mint $f'(u)$, tehát a deriváltnak $x = u$-ban minimuma van. Hasonlóan, ha a környezetben $g'(x) < 0$ és $x \neq u$, akkora deriváltnak u-ban maximuma van. Mindkét lehetőséghez egyaránt szükséges, hogy

$$\big[g'(x)\big]' = \big[f'(x)\big]' = f''(x),$$

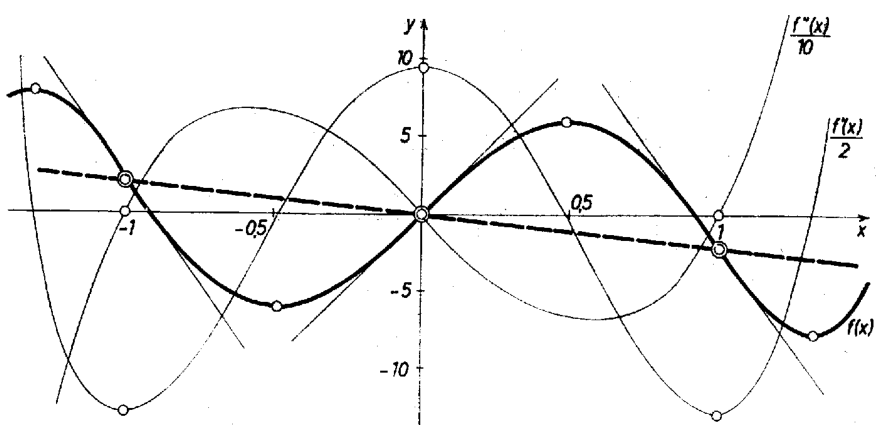
azaz f második deriváltja az u helyen 0 legyen. Feladatunkban

$$f''(x) = (45x^4 - 90x^2 + 19)' = 180x^3 - 180x = 180x(x - 1)(x + 1) = 0$$

az $x = -1$, $x = 0$ és $x = 1$ helyeken teljesül, és most meg kell vizsgálnunk, van-e valóban e helyeken maximum vagy minimum. – A derivált így alakítható:

$$45x^4 - 90x^2 + 19 = 45(x^2 - 1)^2 - 26.$$

A változó tag az $x = \pm 1$ helyek kivételével mindenütt pozitív, és e két helyen 0, tehát e két helyen $f'(x)$-nek valóban szoros értelemben vett minimuma van. Ha pedig $|x| < 1$ és $x \neq 0$, akkor$|x^2 - 1| < 1$, a változó tag kisebb, mint 45, az $x = 0$ helyen pedig egyenlő 45-tel, tehát $f'(x)$-nek $x = 0$-ban valóban szoros értelemben vett maximuma van.



Ez a fentiek szerint elegendő $g(x)$ előjelváltozásához, ahhoz, hogy az $f(x)$ görbe

$$(-1,\ 2), \qquad (0,\ 0), \qquad (1, -2)$$

pontjai inflexiós pontok legyenek. Számítás nélkül látható, hogy ez a három pont rajta van az $y = -2x$ egyenesen. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.