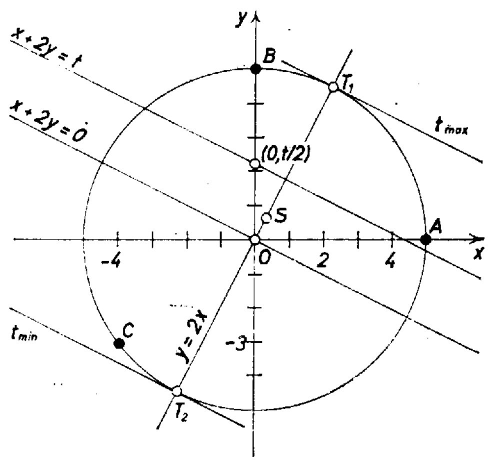
Könnyű látni a koordinátákból, hogy C ugyanakkora távolságra van az O origótól, mint A és B, tehát a k körülírt kör egyenlete

(1) $$x^2 + y^2 = 25.$$

Jelöljük P koordinátáit $(u,\ v)$-vel, A-éit $(x_A,\ y_A)$-val, így (1) alapján

$$PA^2 = (u - x_A)^2 + (v - y_A)^2 = (u^2 + v^2) - 2x_A u - 2y_A v + (x_A^2 + y_A^2) =$$
$$= 2 \cdot 25 - 2x_A u - 2y_A v,$$

hiszen P és A koordinátái egyaránt kielégítik (1)-et.



Hasonlóan fejezhető ki PB^2 és PC^2 a $B(x_B,\ y_B)$ és $C(x_C,\ y_C)$ koordinátákkal, és így a vizsgálandó négyzetösszeg:

$$f(P) = 150 - 2(x_A + x_B + x_C)u - 2(y_A + y_B + y_C)v$$

akkor és csak akkor minimális, ha az

(2) $$(x_A + x_B + x_C)u + (y_A + y_B + y_C)v$$

kifejezés értéke, ami a mi esetünkben $u + 2v$, maximális, azzal a mellékföltétellel, hogy $(u,\ v)$ rajta van k-n, azaz $u^2 + v^2 = 25$.

Mármost az $u + 2v$ kifejezés értéke adott c esetén az

(3) $$x + 2y = c, \quad \text{másképpen}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{c}{2}$$

egyenletű e egyenes pontjaira állandó, és e-t párhuzamosan eltolva csak c értéke változik meg. Az egyenes átmegy az y tengely $(0;\ \frac{c}{2})$ pontján, és c növelése egyértelmű azzal, hogy ez a pont fölfelé tolódik a tengelyen. c értékét azonban csak addig növelhetjük, míg (3)-nak van közös pontja az (1) körrel és c legnagyobb lehetséges értéke akkor adódik, ha a (3) egyenes érinti k-t. A T érintési pontot a kör középpontjából e-re bocsátott merőleges metszi ki k-ból. A merőleges egyenlete $y = 2x$, ennek k-val közös pontjai:

$$T_1(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5}), \qquad T_2(-\sqrt{5},\ -2\sqrt{5}),$$

és $u + 2v$ nyilvánvalóan a T_1-ben veszi fel legnagyobb, $(c = 5\sqrt{5})$ értékét, tehát (2) itt a legkisebb, ez a keresett P pont. (T_2-ben viszont maximális $f(P) = f(T_2)$ értéke.)

Megjegyzések. 1. A (2) kifejezés így írható: $3x_S u + 3y_S v$, ahol $(x_S,\ y_S)$ az ABC háromszög S súlypontjának koordinátái. Ebből az észrevételből a fentiekhez hasonlóan adódik, hogy bármely, a k-ba beírt ABC háromszög csúcsaira képezve az $f(P) = PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeget, ez az OS sugár (félegyenes) által k-ból kimetszett P pontra lesz minimális értékű – más szóval k-nak az S-hez legközelebbi P pontjára –, az átellenes pontra pedig maximális. S akkor és csak akkor azonos O-val, ha az ABC háromszög egyenlő oldalú, ebben az esetben a k-n körülfutó P-re $f(P)$ állandó (akárcsak bármely páros oldalszámú szabályos sokszög esetében).

Az OS egyenest a háromszög Euler–féle egyenesének nevezik. Ismeretes, hogy – ha létezik – átmegy a magasságponton is, valamint a háromszög középháromszöge és egyben a talpponti háromszöge köré írt (Feuerbach–féle) kör középpontján is. A fenti eredménnyel az Euler–egyenesnek egy újabb tulajdonságát ismertük meg.

2. Az $f(P)$ kifejezés számértéke arányos az A, B, C tömegpontrendszer tehetetlenségi nyomatékával, a P-n átmenő és k síkjára merőleges forgástengelyre vonatkozóan, amennyiben A, B, C mindegyikébe egyenlő tömeget helyezünk el. Eredményünk pedig a mechanika ún. Steiner–tételének megfelelője: ha egy M össztömegű pontrendszer tehetetlenségi nyomatéka egy, a rendszer S súlypontján átmenő t tengelyre K_0, akkor, egy a t-vel párhuzamos, tőle d távolságban levő t' tengelyre $K = K_0 + Md^2$, tehát K a t-re minimális, és d akkor a legkisebb, ha k-nak S-hez legközelebbi pontján át vesszük fel t'-t.

Erre a kapcsolatra több dolgozat helyesen rámutatott. Az viszont már nagy kerülő, ha a kérdést ezen az úton kívánjuk megválaszolni, hiszen az idézett tétel maga is matematikai meggondolások eredménye.