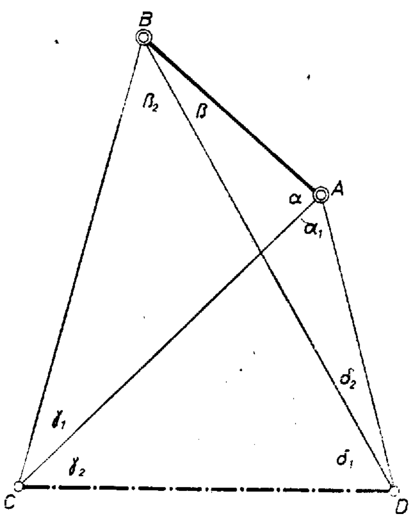
I. megoldás. A konvexség azt jelenti, hogy a CA átló szétválasztja a D, B csúcsokat, a BD átló pedig C-t és A-t, eszerint $DCB\sphericalangle = DCA\sphericalangle + ACB\sphericalangle = 75^\circ$, és hasonlóan $CDA\sphericalangle = CDB\sphericalangle + BDA\sphericalangle = 75^\circ$. Most a négyszögnek mind a négy részháromszögében csupán két–két független adatot ismerünk.



Megoldhatjuk azonban feladatunkat úgy, hogy kifejezzük a CDA és CDB háromszögből CA-t, ill. CB-t (a sinustétel alapján) a *kérdezett* CD oldallal és ismert szögek függvényeivel, majd e két kifejezés felhasználásával az ABC háromszögből az *ismert* AB-t fejezzük ki (a cosinustétel alapján) a kérdezett CD oldallal és ismert szögek szögfüggvényeivel. Ezáltal ugyanis egyenletet kapunk CD-re:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot \cos BCA\sphericalangle =$$
$$= \frac{CD^2 \sin^2 CDA\sphericalangle}{\sin^2 CAD\sphericalangle} + \frac{CD^2 \sin^2 CDB\sphericalangle}{\sin^2 CBD\sphericalangle} - \frac{2 \cdot CD^2 \sin CDA\sphericalangle \sin CDB\sphericalangle \cos BCA\sphericalangle}{\sin CAD\sphericalangle \sin CBD\sphericalangle},$$

amiből, áttérve a szögeknek az ábra szerinti egyszerűbb jelölésére

$$CD^2 = \frac{AB^2}{N}, \quad CD = \frac{AB}{\sqrt{N}}, \quad \text{ahol}$$
$$N = \frac{\sin^2(\delta_1+\delta_2)}{\sin^2(\gamma_2+\delta_1+\delta_2)} + \frac{\sin^2\delta_1}{\sin^2(\gamma_1+\gamma_2+\delta_1)} - \frac{2\sin\delta_1\sin(\delta_1+\delta_2)\cos\gamma_1}{\sin(\gamma_2+\delta_1+\delta_2)\sin(\gamma_1+\gamma_2+\delta_1)}.$$

Számadatainkkal

$$N = \frac{4-\sqrt{3}}{6}, \quad CD = 25\sqrt{\frac{6(4+\sqrt{3})}{13}} = 40{,}66 \text{ egység.}$$

Megjegyzések. 1. Természetesen a DA és DB távolságok kifejezéseivel is kifejezhettük volna AB-t, majd ezzel CD-t.

2. Feladatunkban a numerikus számítást elvégezhettük trigonometriai táblázat nélkül, mert mind a négy szögadat ún. „nevezetes szög”, és ilyenek a felhasznált összegeik is.

3. A feladat a gyakorlati trigonometriában (geodéziában) is szerepel, mint az A, B, C és D tereppontok közti 6 távolság kapcsolatának kérdése, ha ismerjük egyrészt az A és B alappontok távolságát, másrészt a meghatározandó C és D pontokban a másik három pont felé mutató irányok közti szögeket. A feladatot *Hansen*–féle hátrametszésnek nevezik. A tankönyvből ismert hátrametszéshez[1] hasonlítva tekinthetjük egyedül C-t meghatározandó pontnak, D-t mintegy a hiányzó harmadik alappont pótlására önkényesen fölvett pontnak, amely azáltal válik használhatóvá, hogy benne elvégezhetjük ugyanazokat a szögméréseket, mint C-ben.

Gyakorlati feladatban a mért szögadatok tetszés szerintiek lehetnek, ilyenek mellett a fenti N számítása nehézkes a végzendő több különféle művelet miatt. Bemutatjuk alább a megoldás egy átalakítását abból a korból, amikor a számolások megkönnyítésének majdnem kizárólagos eszközei a logaritmus–táblázatok voltak.

Egyébként feladatunk *szerkesztéssel* való megoldását a Gy. 1419. gyakorlat fogja adni.

II. megoldás. Először az ismert AB oldalra támaszkodó $BAC\sphericalangle = \alpha$ és $ABD\sphericalangle = \beta$ szögeket számítjuk ki. Összegük nyilvánvalóan $\alpha + \beta = \gamma_2 + \delta_1$, ismert. Az

$$\frac{AB}{AD} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{CD}{CB} \cdot \frac{DA}{DC} = 1$$

[1] *Czapáry E.–Horvay K.–Pálmay L.:* Matematika a gimn. III. o. számára, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968., 68. oldal.

azonosságból a sinustétel alapján

$$\frac{\sin\delta_2}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}\cdot\frac{\sin\beta_2}{\sin\delta_1}\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha_1}=1,$$

és az addíció tétel alkalmazásával

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=\frac{\sin\alpha_1\sin\gamma_1\sin\delta_1}{\sin\beta_2\sin\gamma_2\sin\delta_2}\sin\beta=K\sin\beta=K\sin(\gamma_2+\delta_1-\alpha)=\\&=K\sin(\gamma_2+\delta_1)\cos\alpha-K\cos(\gamma_2+\delta_1)\sin\alpha,\end{aligned}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1+K\cos(\gamma_2+\delta_1)}{K\sin(\gamma_2+\delta_1)}=\mathrm{ctg}(\gamma_2+\delta_1)+\frac{\sin(\gamma_1+\gamma_2+\delta_1)\sin\gamma_2\sin\delta_2}{\sin(\gamma_2+\delta_1+\delta_2)\sin\gamma_1\sin\delta_1\sin(\gamma_2+\delta_1)},$$

és itt a második tag kiszámítása trigonometriai logaritmustáblázat használatával csak összeadást–kivonást igényel. (Asztali – kézi vagy elektromechanikus – számológépen is könnyebb a számítása, mert csak szorzás, osztás fordul elő benne.) α és β ismeretében a négy pont közti 5 további szakasz a sinustétel alapján számítható, vagyis a cosinustételnél kényelmesebben.

Megjegyzés. Használtuk a „kényelmes” számolás kifejezést, és némelyeknek talán furcsának tűnik ez az összekapcsolás. De talán megérzik, hogy csak azt szokás érteni ezen: a számítási elv (a végképlet) megállapítása után a numerikus végrehajtással kevesebb a probléma.