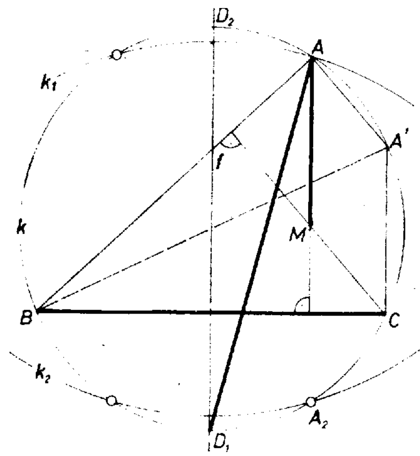
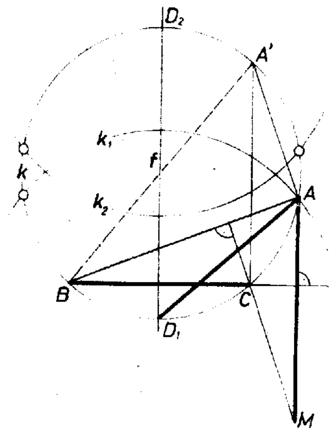
Toljuk el az MA szakaszt úgy, hogy a magasságpont a C csúcsba jusson, és legyen A új helyzete A'. Ekkor egyrészt $A'C||AM\perp BC$, másrészt $A'A||CM\perp BA$, vagyis A' a BC-re C-ben és BA-ra A-ban állított merőlegesek metszéspontja, tehát Thalész tételének megfordítása alapján azonos az ABC háromszög köré írt k kör B-ből kiinduló átmérőjének végpontjával. Eszerint a BC és $CA'=MA$ szakaszokból mint befogókból szerkesztett derékszögű háromszög körülírt köre éppen k. (Mondjuk ki mindjárt: k bármely BC, MA adatpár esetén létrejön, $MA=0$ esetén átmérője maga BC, ami viszont természetesen nem lehet 0.)





A D pont – értelmezésénél fogva – k-nak az A-t nem tartalmazó BC ívén keletkezik. És mivel a BAD és DAC egymással egyenlő szögek k-nak a BD, DC ívén nyugvó kerületi szögei (természetesen azokat a BD, DC íveket értve, amelyek az A-t nem tartalmazó BC ív részei), azért e két ív egyenlő egymással. Így a BD, DC húrok is egyenlők, tehát D szerepére csak az a D_1 és D_2 pont alkalmas, ahol a BC szakasz f felező merőlegese metszi k-t (más szóval D_1 és D_2 a BC-re merőleges átmérő végpontjai). És folytatólag az A csúcs nem lehet máshol, mint azokon a k_i körökön ($i=1,\ 2$), melyeknek középpontja D_i és sugaruk egyenlő az előírt DA szakasszal, vagyis k és k_i valamelyik közös pontjában. Ezzel a szerkesztést befejeztük.

Amennyiben k és k_i közös pontja a BC egyenesnek D_i-t nem tartalmazó partján adódik, akkor a közös pont megfelel A szerepére, és az ABC háromszög megfelel a feladat követelményeinek, mert így az ABC háromszög M magasságpontjára a fenti meggondolás szerint teljesül $MA=CA'$, másrészt BC és DA hossza is az előírás szerinti.

Ha a D_i pontot véve, a DA hosszúságra teljesül $D_iB<DA<D_1D_2$, akkor k_i két különböző pontban metszi k-t, de a keletkező két háromszög egymástól nem lényegesen különböző, hiszen egymás tükörképei f-re. Ha $DA=D_1D_2=BA'$, akkor egyenlő szárú háromszöget kapunk eredményül. Ha pedig $DA\leqq D_iB$ vagy $DA>BA'$, akkor k_i nem ad megoldást.

Mint már említettük, előfordulhat az adathármasban az $AM=0$ érték is (viszont akár $BC=0$, akár $DA=0$ eleve elfajult esetet jelent). Ilyenkor M azonos A-val, a BAC szög derékszög, BC átmérő, D_1 és D_2 egymás tükörképei BC-re, ezért eleve elég D_1-gyel foglalkoznunk.

Mindezek szerint a feladatnak legföljebb 2 lényegesen különböző (nem egybevágó) megoldása van.

Megjegyzések. **1.** A megoldhatóság fönti föltétele megadható az adatokat tartalmazó egyenlőtlenséggel is, hiszen D_1B és D_2B könnyen kifejezhetők a BC, AM hosszúságokkal.

2. Megszerkeszthetjük k-t a háromszög Euler-féle egyenesére ismert tétel alapján is. Jelöljük k középpontját, súlypontját és a BC oldal felezőpontját rendre O, S, F betűvel. AF és OM az S-ben metszik egymást és $OF||MA$, így SOF és SMA középpontosan hasonló háromszögek. Továbbá $SF=SA/2$, így $OF=MA/2$, a BOF derékszögű háromszög megszerkeszthető.

Buza Antal(Dunaújváros, Münnich F. Gimn.)