A bal oldal tekinthető egy p tagú mértani sorozat összegének. Könnyen látható ez, miután a törtet bővítjük az $x^{2p/q}$ hatvánnyal és bevezetjük az $x^{1/q}=u$ és $y^{1/q}=v$ jelöléseket (tehát u és v is pozitív számok):

$$\frac{x^{p/q}-y^{p/q}}{x^{1/q}-y^{1/q}}=\frac{u^p-v^p}{u-v}=u^{p-1}\frac{\left(\frac{v}{u}\right)^F-1}{\frac{v}{u}-1}=u^{p-1}+u^{p-2}v+\ldots+uv^{p-2}+v^{p-1}. \tag{2}$$

Új jelölésünkkel a jobb oldal $p\ (uv)^{p-1/2}$.

$p=1$ esetében mindkét oldal értéke 1, ekkor tehát az állításbeli egyenlőtlenség helyett egyenlőség érvényes. (A bal oldalra már (2) második alakjából látható, hogy $p=1$ esetében 1-gyel egyenlő, hiszen az $x\neq y$ föltevés alapján $u\neq v$.) Ezt figyelembe véve a $p\geqq 2$ megszorítással fogjuk bizonyítani a fenti átalakítások alapján osztással adódó, az eredetivel ekvivalens alábbi állítást:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{p-1}{2}}+\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{p-3}{2}}+\ldots+\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{p-3}{2}}+\left(\frac{v}{u}\right)^{\frac{p-1}{2}}>p, \tag{3}$$

ahol az $u/v\neq 1$, pozitív szám.

A bal oldal elölről és hátulról számított ugyanazon sorszámú tagjai egymás reciprokai. Az ilyen $2-2$ tagot $1-1$ párba kapcsolva, mindegyik pár összege nagyobb 2-nél, ugyanis ha c az 1-től különböző pozitív szám, akkor

$$c+\frac{1}{c}=\frac{c^2+1}{c}=\frac{(c-1)^2}{c}+2>2. \tag{4}$$

Eszerint ha p páros: $p=2k$, akkor a párok száma k, és így a B bal oldal nagyobb $2k$-nál, tehát (3) érvényes. Ha pedig p páratlan: $p=2k+1$, akkor is k számú párt kapunk és B-nek középső, pár nélkül maradó tagja 1, tehát $B>1+2k=p$.

Azt bizonyítottuk tehát be, hogy ha $x\neq y$ pozitív számok, p természetes szám, továbbá $q\neq 0$, racionális szám, akkor

$$\frac{x^{-p/q}-y^{p/q}\cdot x^{-2p/q}}{x^{(1-2p)/q}-y^{1/q}\cdot x^{-2p/q}}\geqq p(xy)^{(p-1)/2q}$$

és egyenlőség csak $p=1$ esetén teljesül (ugyanis a q értékkészletének most mondott bővítése még mindig biztosítja az u, v pozitív számok létezését).

Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A fenti átalakítások után úgy is kapunk (1)-gyel ekvivalens állítást, ha a két oldalt p-vel osztjuk:

$$\frac{1}{p}\left(u^{p-1}+u^{p-2}v+\ldots+v^{p-1}\right)>(uv)^{(p-1)/2}.$$

Ez pedig igaz a p számú, különböző pozitív szám számtani és mértani közepére ismert egyenlőtlenség alapján, ugyanis a bal oldali zárójelbeli tagok szorzatában u és v kitevője egyaránt

$$(p-1)+(p-2)+\ldots+1+0=p\cdot\frac{p-1}{2},$$

és innen a p tényező a mértani közepet előállító gyökvonással tűnik el.

Horváth Mária (Hódmezővásárhely, Bethlen G. Gimn., III. o. t.)
Korda Zsuzsa (Budapest, Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Lényegében (4)-ben is a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget használtuk fel, 2 tagra.