Ha $k \leqq x < k+1$ (k egész), akkor $\{x\} = x - k$, tehát

$$f(x) = x^2 - (x-k)^2 + x + |x^2 - 1|, \tag{1}$$

azaz

$$f(x) = |x^2 - 1| + (2k+1)x - k^2 \tag{2}$$

ezért függvényünk képe parabolaívekből tevődik össze, hiszen az $|x^2 - 1|$ kifejezés vagy $x^2 - 1$, vagy $-x^2 + 1$.

A (2)-ből azonnal leolvashatjuk, hogy az $x = k$ helyen az $f(x)$ helyettesítési értéke megegyezik jobb oldali határértékével és e közös érték: $|k^2 - 1| + k^2 + k$, a bal oldali határérték pedig $|k^2 - 1| + k^2 + k - 1$. Így függvényünk az egész helyeken jobbról folytonos és bal oldali határértéke 1-gyel kisebb, mint a helyettesítési értéke, azaz 1 egységgel felugrik.

a) Ha $k \geqq 1$, azaz $x \geqq 1$, akkor (2)-ből teljes négyzetté való kiegészítéssel kapjuk, hogy

$$f(x) = \left(x + k + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(2k^2 + k + \frac{5}{4}\right). \tag{3}$$

Így $k \geqq 1$ esetén $f(x)$ szigorúan monoton növekvő a $[k, k+1)$ intervallumokban, hiszen ezekben $x + k + \dfrac{1}{2} > 0$. Figyelembe véve az ugrásokról mondottakat, megállapíthatjuk, hogy $x \geqq 1$ esetén $f(x)$ szigorúan monoton növekvő, tehát itt szélső értéke, s $f(1) = 2$ miatt zérushelye nincsen.

b) Ha $k = 0$, azaz $0 \leqq x < 1$, akkor

$$f(x) = \frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2,$$

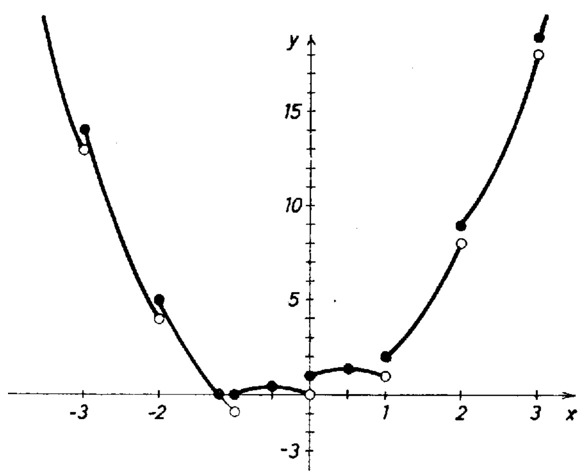
amiből leolvasható, hogy az $x_0 = \dfrac{1}{2}$ helyen maximum van, és zérushely nincsen (hiszen ekkor $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| \leqq \dfrac{1}{2}$, s így $f(x) \geqq 1$).

c) Ha $k = -1$, azaz $-1 \leqq x < 0$, akkor

$$f(x) = \frac{1}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2,$$

tehát az $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ helyen maximum van és $x_1^* = -1$ zérushely (több zérushely itt nincsen, hiszen $-1 < x < 0$ esetén

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}, \quad \text{s ekkor} \quad f(x) > 0).$$



d) Ha $k < -1$, azaz $x < -1$, akkor $f(x)$-re ismét a (3) előállítás érvényes, tehát $f(x)$ szigorúan monoton csökkenő a $[k, k+1)$ intervallumokban, hiszen esetünkben $x + k + \dfrac{1}{2} < 0$. Így ebben az esetben szélsőérték csak az $x_{-k} = k(k = -2, -3, \ldots)$ helyeken lehet. Ezek a helyek maximum helyek, hiszen ha k a (-1)-nél kisebb egész szám, akkor van olyan környezete, amelyben $f(k)$ a legnagyobb függvényérték (mert az $x = k$ helyen a bal oldali határérték $f(k) - 1$, s ezért van olyan $\delta(0 < \delta < 1)$, hogy $f(x) < f(k)$, ha $k - \delta < x < k$, másrészt láttuk, hogy $f(x) < f(k)$, ha $k < x < k+1$, tehát mindig $f(k) > f(x)$, ha x a k szám δ sugarú környezetébe esik és $x \neq k$).

A fentiekből az is következik, hogy $k < -1$ esetén a $[k, k+1)$ intervallumban csak akkor lehet zérushely, ha $f(x)$-nek a $(k+1)$ helyen vett bal oldali határértéke negatív, azaz

$$|(k+1)^2 - 1| + (k+1)^2 + (k+1) - 1 = k(2k+5) + 1 < 0.$$

Így zérushely csak a $[-2, -1]$ intervallumban lehet, amit (3)-ból könnyen meg is kaphatunk a $k = -2$ értékkel:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4} = 0,$$

azaz

$$x_2^* = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} = -1,193.$$

Összefoglalva: megállapítottuk, hogy az (1) függvény lokális maximum helyei: $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_k = -k$ $(k = 2, 3, \ldots)$; lokális minimum helye nincsen, és két zérushelye van, ezek: $x_1^* = -1$ és $x_2^* = -1{,}193$.