A lehetséges események száma 10!, ennyiféleképpen permutálhatjuk a leveleket az egy sorban lerögzített borítékok előtt a betevés céljára.

Kedvező eseménynek azt tekintjük, ha a levelek közül valamelyik 5 a saját borítékjába jut, a többi 5 levél viszont úgy helyezkedik el a maradó 5 borítékban – vagyis éppen a nekik szánt 5 borítékban –, hogy egyik sem a saját borítékjában van benne. A helyesen borítékolt 5 levél $\binom{10}{5}$ különböző módon választható meg. Minden ilyen esetben lényegében ugyanaz a további feladat áll előttünk: a hátralevő 5 levél – jelöljük őket röviden az 1, 2, 3, 4, 5 számokkal – olyan sorrendjei, permutációi számának megállapítása a rendre hozzájuk tartozó 1, 2, 3, 4, 5 sorszámú borítékok előtt – röviden: helyeken –, amelyekben minden egyes szám részére egy-egy hely tiltott és megfordítva minden egyes hely részére egy-egy szám tiltott, pl. az 1-es szám bárhol állhat, csak az 1. helyen nem, és az 1. helyen bármi állhat, csak az 1-es szám nem, és így tovább.

Nevezzük általában az 1, 2, …, n számok ilyen sorrendjeit e számok abszolút permutációinak, jelöljük a számukat A_n-nel. Tegyük fel, hogy A_1, A_2, A_3 és A_4 értékét már ismerjük, megmutatjuk, hogy ezekből A_5 értéke kiszámítható.

Állítsuk az 5-öst valamelyik kisebb sorszámú helyre, mondjuk a 4-ikre. (Ezzel természetesen a 4-es számra is teljesül a követelmény.) Ha most a 4-est az 5. helyre írjuk be – vagyis a 4 és 5 helyet cserél –, ezáltal feladatunk leszűkül az 1, 2, 3 számok abszolút permutálására, az ilyenek száma tehát A_3.

Ha pedig a 4-est nem az 5. helyre tesszük, akkor az 1, 2, 3, 4 számok abszolút permutációit kell képeznünk az 1., 2., 3. és 5. helyeken (a 4-es részére más szempont miatt tilos az 5. hely, ti. azért, mert az olyan permutációkat már elintéztük), ide tehát A_4 számú sorrend tartozik.

Amíg tehát az 5-ös a 4. helyen áll, A_3+A_4 abszolút permutációt kapunk, és ha az 5-ös szám sorra veszi a részére megengedett 4 helyet, akkor $A_5=4(A_3+A_4)$-et.

Ugyanezzel a gondolatmenettel $A_4=3(A_2+A_3)$ és $A_3=2(A_1+A_2)$, másrészt nyilvánvalóan $A_1=0$ és $A_2=1$. Ezek szerint $A_3=2$, $A_4=9$ és $A_5=44$, tehát a levél elkeveredési problémában $\binom{10}{5}\cdot 44$ a kedvezőnek tekintett esetek száma.

A keresett valószínűség pedig

$$p=\frac{1}{10!}\binom{10}{5}\cdot 44=\frac{10!\cdot 44}{10!5!5!}=\frac{44}{120^2}=\frac{11}{3600}=0{,}0031.$$

(Másképpen: 3600 találomra vett próbálkozás közül 11-szer, azaz 1000-ből 3-szor várható a kívánt típusú elrendeződés.)

Megjegyzések. 1. Hasonlóan azoknak az eseteknek a k száma, amelyekben pontosan j a jól borítékolt levelek száma:

$$\begin{array}{llllll} j= & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, \\ k= & 1\,334\,961, & 1\,334\,960, & 667\,485, & 222\,480, & 55\,650, \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} j= & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, \\ k= & 11\,088, & 1890, & 240, & 45, & 0, & 1. \end{array}$$

Feltűnő, hogy a $j=0$ és $j=1$ számokhoz tartozó $k_0=A_{10}$ és $k_1=10\cdot A_9$ számok csak 1-gyel térnek el egymástól, tehát $A_{10}=10\cdot A_9+1$. Ez nem véletlen, alább magyarázatát adjuk.

2. A megoldás gondolatmenete szerint $A_n=(n-1)(A_{n-1}+A_{n-2})$. Írjuk fel ezt az egyenlőséget egymás alá A_{2n}-re, A_{2n-1}-re, …, A_3-ra, szorozzuk meg a páratlan indexűekre vonatkozó sorokat (-1)-gyel:

$$\begin{aligned} A_{2n}&=(2n-1)A_{2n-1}+(2n-1)A_{2n-2},\\ -A_{2n-1}&=-(2n-2)A_{2n-2}-(2n-2)A_{2n-3},\\ A_{2n-2}&=(2n-3)A_{2n-3}+(2n-3)A_{2n-4},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ -A_5&=-4A_4-4A_3,\\ A_4&=3A_3+3A_2,\\ -A_3&=-2A_2-2A_1. \end{aligned}$$

Összeadással, rendezéssel, $A_1=0$ és $A_2=1$ figyelembevételével

$$A_{2n}=2nA_{2n-1}+1,$$

majd lényegében ugyanígy

$$A_{2n+1}=(2n+1)A_{2n}-1,$$

azaz egységesen

$$A_n=n\cdot A_{n-1}+(-1)^n.$$

3. Meglepő a hasonlóság eredményünk és a permutációk számára érvényes $P_n = n \cdot P_{n-1}$ összefüggés között. De mit tesz az a $(-1)^n$ tagocska, amit a kombinatorikában megszokott „nagy” számok mellett hajlamosak vagyunk lekicsinyelni! Az első három tagban letöri A_n-et P_n-hez képest! $A_2 = 2 \cdot A_1 + (-1)^2$ esetében még ez a „nagyobbik” a két tag közül, de már így is A_2 csak fele a P_2-nek; ezután $A_3 = 3 \cdot A_2 - 1$ esetében még jelentősen csökkent a $(-1)^3$ tag, és $A_3 = P_3/3$. A talált $1/3$ az A_n/P_n arány legkisebb értéke.

Meg lehet mutatni – az érkezett megoldások ezzel, vagy a hozzá vezető meggondolással dolgoztak, – hogy minden n-re

$$A_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{n!}{n!},$$

ebből pedig

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{P_n} = \frac{1}{e} = 0{,}36\ldots,$$

ahol e a természetes logaritmus alapszáma.

4. A valószínűségszámítás „őskorában”, amikor még kizárólag szerencsejátékok kérdéseit vizsgálták, problémánk 13-as játék (franciául: jeu du treize) néven szerepelt: a francia kártya egy színének 13 lapja hányféleképpen rendezhető el úgy (vagy keverés után vakon egymás után rakva hányféleképpen adódhat), hogy egyik lap se álljon a maga számának megfelelő helyen (a fiú a 11., a dáma a 12., a királya 13 helyen).