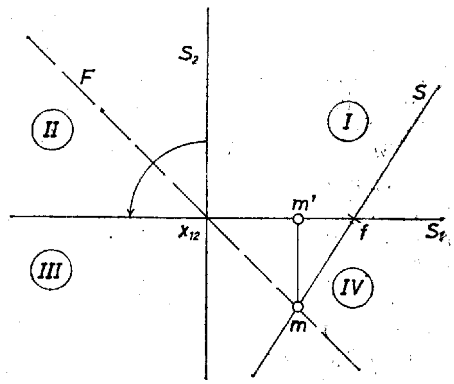
a) Jelöljük a sokszög síkját S-sel, a képsíkrendszer síkjait S_1 gyel és S_2-vel, S_1 és S_2 metszésvonalát x_{12}-vel.



S tetszőleges P pontján át fektessünk x_{12}-re merőleges V síkot ez tartalmazza a P pont S_1 és S_2 képsíkokon levő merőleges vetületeit és a képsíkokat x_{12}-re merőleges v_1, v_2 egyenesekben metszi. S_2-nek az S_1-be való beforgatása után a v_2-ből kapott v egyenes azonos lesz a v_1 egyenessel, és ez a v egyenes átmegy a P pont $P' = P_1$ és P'' képein. Ha tehát S_1 tetszőleges P pontjához megkeressük S-nek azt a P pontját, amelyiknek P' az első képe, és P'-höz P második képét rendeljük hozzá, akkor S_1-ben olyan ponttranszformációt hoztunk létre, amelyben a megfelelő $P'P''$ pontpárok ugyanazon az x_{12}-re merőleges v egyenesen vannak rajta. Ez a transzformáció tetszőleges S_1-beli P' pontból kiindulva végrehajtható, hiszen a P'-ben S_1-re emelt merőleges mindig metszi S-t, mert feltevésünk szerint S nem merőleges S_1-re. Mivel S S_2 re sem merőleges, S_1 tetszőleges P'' pontjából kiindulva a transzformáció a fordított irányban is egyértelműen elvégezhető.

Meg kell még keresnünk azt az egyenest S_1-ben, amelyet a most létrehozott megfeleltetés szerint összetartozó egyenesek ugyanabban a pontban metszenek. S_1 tetszőleges e' egyeneséhez keressük meg S-en azt az e egyenest, amelynek e' az első képe (azaz tekintsük az e'-n át S_1-re emelt merőleges sík és S metszésvonalát), és jelöljük e második képét e''-vel: ez az e'-nek megfeleltetett egyenes. Ha e' és e'' metszi egymást egy $M' = M''$ pontban, ez a metszéspont S-nek olyan M pontját határozza meg, amelynek S_1-en és S_2-n levő M_1 és M_2 vetületei a beforgatás során fedésbe kerülnek. $MM_1 = MM_2$ miatt M az S_1, S_2 síkoktól egyenlő távolságra van, tehát rajta van e síkok valamelyik szögfelező síkján. A képsíkok által létrehozott térnegyedeket a szokásos módon I–IV-ig számozva elmondhatjuk, hogy az I. és III. térnegyedbeli pontok képei $x_{1,2}$ ellentétes oldalára kerülnek, M tehát csak a II. és IV. térnegyedben levő F szögfelező síkon lehet rajta. Ennek a síknak tetszőleges M pontjára $MM_1 = MM_2$, és így az M pont M' és M'' képei $x_{1,2}$ azonos oldalán és $x_{1,2}$-től egyenlő távolságra, vannak, tehát azonosak.

Ezzel beláttuk, hogy tetszőleges egymást metsző megfelelő e', e'' egyenespár M' metszéspontja F valamely M pontjának a képe, M' tehát rajta van S és Fm metszésvonalának m' képén (természetesen m'' is azonos m'-vel). Közben az is kiderült, hogy ha egyáltalán van metsző egyenespár, akkor S és F metszi egymást, a metszésvonalukból kapott m' egyenest a megfelelő egyenesek ugyanabban a pontban metszik. Ebből következik, hogy S és F akkor és csak akkor lehet párhuzamos, ha a megfelelő egyenesek párhuzamosak. A feladat első részében mondott állításokat ezzel bebizonyítottuk.

b) A szóban forgó ponttranszformáció akkor merőleges affinitás, ha a tengelye m' létrejön, és párhuzamos $x_{1,2}$-vel, hiszen ha $m' \| x_{1,2}$, akkor $m \| x_{1,2}$, és így $S \| x_{1,2}$, ha pedig $S \| x_{1,2}$, akkor az $x_{1,2}$-n átmenő F-t $x_{1,2}$-vel párhuzamos egyenesben metszi. Ekkor S is merőleges az $x_{1,2}$-re merőleges S_3 síkra (a szokásos harmadik képsíkra), és az affinitás az S, S_1 síkok f metszésvonalához $x_{1,2}$-t rendeli. f-nek akkor és csak akkor lesz az m'-re vonatkozó tükörképe $x_{1,2}$, ha az f, m, $x_{1,2}$ egyenesek S_3-on levő döféspontjai egyenlő szárú derékszögű háromszöget határoznak meg, vagyis ha $S \perp F$. Ez az eset tehát, amikor az affinitás tükrözés. Mint láttuk, eltolás akkor lesz a transzformáció, ha m nem jön létre, azaz $S \parallel F$. Ha S azonos F-fel, akkor az eltolás helybenhagyás, azaz a megfelelő pontjaik azonosak.

Megjegyzés. A feladat a) része kissé pontatlanul fogalmazta meg az affinitást, a fenti megoldásban a következő definíciót használtuk. Affinitásnak nevezzük a sík mindazon f kölcsönösen egyértelmű ponttranszformációit, amelyek az egy egyenesen levő pontokhoz egy egyenesen levő pontokat rendelnek, és amelyekre teljesül a következő két állítás:

i) van olyan n irány a síkon, amellyel tetszőleges P ponton át párhuzamost húzva, a P pont $f(P)$ képén keresztül átmenő egyenest kapunk (esetünkben ez az $x_{1,2}$-re merőleges irány volt);

ii) vagy van olyan t egyenes a síkon, amelyiket a megfelelő egyenesek ugyanabban a pontban metszenek, vagy a megfelelő egyenesek párhuzamosak (esetünkben t szerepét m játszotta).

Feladatunk szövege nem zárja ki azt az esetet, hogy bizonyos megfelelő egyenespárok a t tengelyen messék egymást, mások pedig párhuzamosak legyenek. Könnyen látható azonban, hogy ez sohasem fordulhat elő, ha a ponttranszformációra a feladatban mondott tulajdonság teljesül. Az is könnyen látható, hogy ha a megfelelő egyenesek párhuzamosak, akkor mindig eltolásról van szó.