I. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok) részére

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az a és b számokra $ab \neq 0$ és $a+b=1$, akkor

$$\frac{b}{a^3-1}-\frac{a}{b^3-1}=\frac{2(a-b)}{a^2b^2+3}.$$

2. Melyik a nagyobb a következő két szám közül:

$$\frac{10^{1974}+1}{10^{1975}+1} \quad \text{vagy} \quad \frac{10^{1975}+1}{10^{1976}+1}?$$

3. Pista, néhány osztálytársának kérésére ceruzákat vásárolt, összesen 11 darabot. Az üzletben 2 Ft-os, 4 Ft-os és 5 Ft-os ceruzák voltak. Hány darabot vásárolt az egyes fajtákból, ha összesen 27 Ft-ot fizetett?

4. Milyen x értékekre teljesül az

$$\frac{|x+2|-1}{|x-1|-3}>0$$

egyenlőtlenség?

5. Hol helyezkednek el egy $ABCD$ négyzet belsejében azok a P pontok, amelyekre a PAB háromszög fele a PDA háromszög területének?

6. Határozzuk meg azokat az x, y, z számokat, amelyek egyidejűleg kielégítik az alábbi két egyenletet:

$$\begin{aligned} x+y-z&=2,\\ 2xy-z^2&=4. \end{aligned}$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy körbe írható konvex négyszög egyik szöge egyenlő a négyszög átlói által bezárt egyik szöggel, akkor van a négyszögnek két egyenlő oldala. Igaz-e az állítás megfordítása?

8. Ha egy paralelogramma oldalainak felezőpontját a szemközti csúcsokkal összekötjük, akkor az így kapott nyolc egyenes egy nyolcszöget határoz meg.
Mutassuk meg, hogy e nyolcszög területe a paralelogramma területének hatodrésze.

Haladók (legfeljebb II. osztályosok) részére

1. Állapítsuk meg az

$$y=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}$$

függvény értelmezési tartományát!

2. Rajzoljunk egy kört és belsejében jelöljünk ki egy P pontot! P-n keresztül egymásra merőlegcsen két egyenest húzunk. A kör ezen egyenesekből e, illetve f hosszúságú húrokat metsz ki. Mutassuk meg, hogy az e^2+f^2 kifejezés értéke nem függ az egyenesek helyzetétől!

3. Bizonyítsuk be a következő azonosságot!
Tetszőleges $n \geq 2$ egész szám esetén:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

4. Mutassuk meg, hogy nincsenek olyan x, y egész számok, amelyek kielégítik a

$$15x^2-7y^2=9$$

egyenletet!

5. Hány olyan természetes szám van, amelynek négyzete a tízes számrendszerben felírva 300 darab 1 és néhány darab 0 számjegyből áll?

6. Bizonyítsuk be, hogy minden hegyesszögű háromszög szögei közt van kettő olyan, amelyek aránya legalább 1 és legfeljebb $\frac{5}{3}$!

7. Milyen α szög esetén lesz a
$$\sin\alpha + \cos\alpha$$
kifejezés értéke maximális?

8. Adott egy trapéz, amelynek szárai metszők. Egyetlen egyélű vonalzó segítségével szerkesszünk az átlók metszéspontján át a trapéz lapjaival párhuzamos egyenest.

II. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok) versenye

A) Az általános tantervű osztályok részére

1. Az adott a, b, c, d pozitív számokról tudjuk, hogy
$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$
Milyen x, y számpárokra teljesül a következő egyenlőtlenség:
$$\frac{a}{b} < \frac{ax-cy}{bx-dy} < \frac{c}{d}.$$

2. Jelölje az ABC háromszög A, B, C csúcsából kiinduló magasságvonalnak a BC, a CA, az AB egyenesen levő talppontját rendre A_1, B_1, C_1. Az $A_1B_1C_1$ háromszög egymás utáni csúcsainál levő szöge $42°$, $56°$, $82°$. Mekkorák lehetnek az ABC háromszög szögei?

3. Kiválasztható-e egy szabályos 13-szög csúcsai közül négy úgy, hogy az ezek által meghatározott négyszög oldalai és átlói (hat szakasz) különböző hosszúak legyenek?

B) A szakosított matematika I. tantervű osztályok részére

1. Mutassuk meg, hogy ha egy trapéz oldalai különböző hosszúak és a trapézba kör írható, akkor a legrövidebb és leghosszabb oldalak párhuzamosak.

2. Határozzuk meg az összes olyan $p \geq 2$ törzsszámot, amelyhez léteznek a, b, c természetes számok úgy, hogy
$$p + a = b^p \quad \text{és} \quad p - a = c^p.$$

3. Adott a síkban 6 pont úgy, hogy közülük bármelyik hármon áthalad egy kör, és minden ilyen kör legalább négy adott ponton halad át. Bizonyítsuk be, hogy a 6 pont egy körön van.

C) A szakosított matematika II. tantervű osztályok részére

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:
$$\begin{array}{ll}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + nx_n & = a_1,\\
x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-1)x_n + nx_1 & = a_2,\\
x_3 + 2x_4 + 3x_5 + \ldots + (n-2)x_n + (n-1)x_1 + nx_2 & = a_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
x_n + 2x_1 + 3x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + nx_{n-1} & = a_n,
\end{array}$$
ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adott számok.

2. Jelöljük p_n-nel az n-edik törzsszámot ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$ stb.). A p_n-nél nem nagyobb egész számok közül maximálisan hány választható ki úgy, hogy közülük bármely kettő relatív prím legyen?

3. Az $ABCD$ konvex négyszög AB és DC oldalegyeneseinek metszéspontja M, átlóinak felezőpontja E és F. Bizonyítsuk be, hogy az EFM háromszög területe az $ABCD$ négyszög területének a negyedrésze.

Haladók (legfeljebb II. osztályosok) versenye

A) Az általános tantervű osztályok részére

1. Egy nyolcszög oldalainak felezőpontjai közül hét adott. Szerkesszük meg a nyolcadikat!

2. Tizenhét doboz mindegyikében piros, kék, sárga és zöld golyók vannak. Bizonyítsuk be, hogy található két olyan doboz, amelyekben együttvéve mind a négy színű golyóból páros sok van!

3. Igazoljuk, hogy végtelen sok x, y, z pozitív egész számhármasra teljesül a következő egyenlőség!

$$x^7 + y^8 = z^9.$$

B) A szakosított matematika tantervű osztályok részére

1. Azonos az A) csoport 2. feladatával.

2. A sík három különböző egységsugarú köre átmegy a P ponton. Igazoljuk, hogy a körök P-től különböző metszéspontjai egy egységsugarú körön vannak!

3. Azonos az A) csoport 3. feladatával.

C) A szakosított matematika II. tantervű osztályok részére

1. Határozzuk meg az

$$x^2 - y^2 = 2xyz$$

egyenlet összes egész megoldását.

2. Igazoljuk, hogy nemnegatív a, b, c valós számok esetén

$$a^5b + b^5c + c^5a \leq a^6 + b^6 + c^6.$$

3. Legyen $ABCDE$ konvex ötszög. Az ABC, BCD, CDE, DEA, EAB háromszögek rendre egységnyi területűek. Számítsuk ki az ötszög területét!