I. forduló

1. Melyek azok a négyszögek, amelyekben a két-két szemben fekvő oldal, valamint a két-két szemben fekvő szög különbsége egyenlő?

2. Egy mértani sorozat három egymást követő elemének összege 21, ugyanezek négyzetösszege 189. Mi ez a három szám?

3. Adott az S sík és egyik oldalán az A, B, C pontok, amelyek nincsenek egy egyenesen. Legyen A', B', C' az S sík három tetszőleges pontja. Az AA', BB', CC' szakaszok felezőpontja rendre L, M, N és legyen G az LMN háromszög súlypontja. Mi a G pontok mértani helye, ha A', B', C' befutja az egész síkot? (Azokat az eseteket, amelyekben L, M, N egy egyenesen vannak, hagyjuk figyelmen kívül.)

4. Az $f(x)$ és $g(x)$ függvények a -1, 0, 1 helyeken kívül minden x-re értelmezve vannak és eleget tesznek az alábbi egyenleteknek:

$$x \cdot f(x) - \frac{1}{x} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1,$$
$$x^2 \cdot g(x) - \frac{1}{x^2} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(x) + g(x) = 0$.

5. Jelölje $[x]$ az x-nél nem nagyobb egész számok között a legnagyobbikat, és legyen n egy adott egész szám. Tekintsük azokat a k természetes számokat, amelyekre teljesül, hogy

$$2 \cdot \left[\frac{n+k}{3}\right] < k.$$

Melyik ezek között a legkisebb?

6. Milyen „a” valós értékek mellett van megoldása a

$$\cos 3x \cdot \cos^3 x - \sin 3x \cdot \sin^3 x = a$$

egyenletnek?

7. Határozzuk meg az összes olyan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (valós) számokat, amelyekre az

$$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n + x_5^n, \quad n \geq 1$$

összeg értéke nem függ n-től.

8. Arthur király ötven lovagja a kerek asztal mellett ül. Előttük egy-egy serleg, tele vagy vörös vagy fehér borral. Éjfélkor mindenki átadja valakinek a serlegét, mégpedig mindazok, akiknél vörös bor van, a jobb szomszédjuknak, a többiek pedig a bal oldali szomszédjuknak.

Bizonyítsuk be, hogy így lesz olyan lovag, akinek nem jut serleg. (Az asztalon vörös bor is, fehér bor is volt.)

II. forduló

A) A gimnáziumok általános tantervű osztályai, valamint a szakközépiskolák részére

1. Adott az $ABCD$ paralelogramma. Mérjünk fel tetszés szerinti h egyenesszakaszt a B csúcsból kiindulva a BC oldalegyenesre a C csúcs irányába, hasonlóképpen a D csúcsból kiindulva a DC oldalegyenesre ugyancsak a C csúcs irányába! Legyenek a felmért egyenesszakaszok végpontjai rendre K, ill. L. Jelölje M a BL és a DK egyenesek metszéspontját!

Bizonyítsuk be, hogy az AM egyenes felezi a BAD szöget!

2. Oldjuk meg természetes számokban a következő egyenletet:

$$\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = \frac{8}{73}.$$

3. Színezzük ki egy egységnyi oldalú – kerületét is tartalmazó – négyzetlap valamennyi pontját! A színezéshez pontosan három színt kell használnunk.

Bizonyítsuk be, hogy bármiképpen színezzük is ki az említett négyzetlap pontjait, mindig találhatunk közöttük olyan két azonos színű pontot, amelyek távolsága legalább $\sqrt{65/64}$.

B) A gimnáziumok szakosított (matematika I.) tantervű osztályai részére

1. Legyen P az $A_1A_2\ldots A_n$ szabályos n-szög egy tetszőleges pontja. Bizonyítsuk be, hogy az n-szögnek van olyan két A_i, A_j csúcsa, amelyekre

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi \leq A_iPA_j \leq \pi.$$

2. Az

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$$

egyenletben szereplő együtthatókra

$$0 < a_n \leq a_{n-1} \leq \ldots \leq a_1 \leq a_0$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy az egyenletnek nincs (-1)-nél nagyobb gyöke.

3. Tíz rabló egy többzáras ládában őrzi a kincsét. Minden rablónak bizonyos zárakhoz van kulcsa, egy zárhoz esetleg többnek is. A kulcsok úgy vannak elosztva, hogy semelyik három rabló se tudja a birtokában levő kulcsokkal kinyitni a ládát, de bármely négy közülük már hozzá tud férni a kincshez.

Legalább hány zár szükséges a fenti feltételek teljesüléséhez?

C) A gimnáziumok szakosított matematika II. tantervű osztályai részére

1. A $\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$ összegben az összes lehetséges módon megválasztjuk az előjeleket. Az így kapott 2^n darab szám koszinuszának összegét jelöljük S-sel. Bizonyítsuk be, hogy $S = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha valamely $1 \leq i \leq n$-re $a_i = \dfrac{\pi}{2}(2k+1)$ (k egész).

2. Keressük meg az összes olyan x, y egész számokat (ha vannak), amelyekre

$$12x^2 + 14xy + 15 = 8x + 21y.$$

3. Adjunk meg a síkban négy pontot úgy, hogy páronkénti távolságaik mindegyike legalább egységnyi legyen, és e távolságok négyzetösszege minimális legyen.