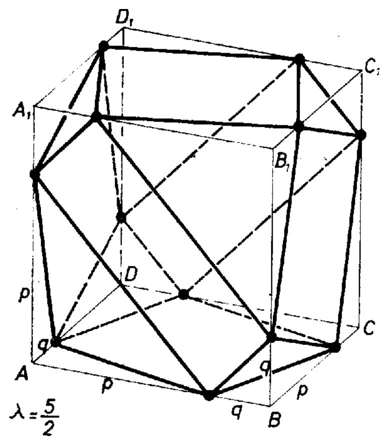
Egyszerűbben dolgozhatunk, ha a kérdést így mondjuk ki: „λ mely értékénél a legnagyobb a kocka lemetszett részeinek együttes térfogata ?" – továbbá ha az élek két részét nem egymáshoz viszonyítjuk, hanem mindegyiket az eredeti kockaélhez. Így az XY él λ arányú Z osztópontjára

$$XZ = p = \frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot XY, \qquad ZY = q = \frac{1}{\lambda+1} \cdot XY \quad \text{és} \quad p+q=a, \tag{1}$$

ahol a a kocka éleinek hosszát jelöli.

A lemetszett test mind a 8 kockacsúcs esetében háromoldalú gúla, és térfogata a kockával közös csúcsába befutó (p vagy q hosszúságú) élek szorzatának 1/6 része. Az első 8 felsorolt élben mind a 8 kockacsúcs egyszer X, egyszer Y szerepét kapta, eddig tehát mind a 8 csúcs egy p és egy q hosszúságú élrész közös pontja. Így pedig az utolsónak vett 4 él kezdőpontjaiban: A-ban, B_1-ben, C-ben és D_1-ben két p és egy q hosszúságú élrész fut össze, a többi 4 csúcsba pedig egy p és két q hosszúságú élrész. Ezek szerint a lemetszett gúlák együttes térfogata

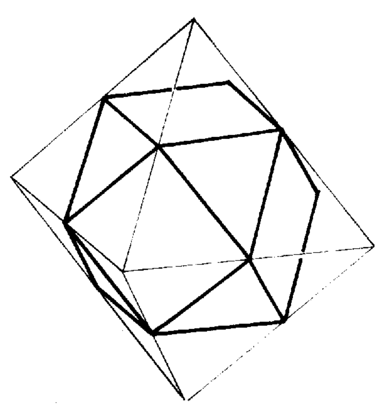


1. ábra

$$V = \frac{4}{6}p^2q + \frac{4}{6}pq^2 = \frac{2a}{3}pq,$$

és nyilvánvalóan elég megkeresnünk azt a λ értéket, amely mellett az állandó a összegű p és q részek szorzata a legnagyobb. A $pq = p(a-p)$ másodfokú függvény maximuma a $p = \dfrac{a}{2}$ helyen van, ekkor $p = q$, és (1) alapján a keresett arányszám $\lambda = 1$, vagyis a kocka minden élén a felezőpontot vesszük osztáspontnak. – Ezzel az előrebocsátottak szerint a feladatot megoldottuk. (A visszamaradt test térfogata a kockáénak 5/6 része.)

Megjegyzés. A $\lambda = 1$ esetben a visszamaradó testet 6 négyzet és 8 szabályos háromszög határolja. Ha benne a háromszögek csúcsait tükrözzük a szemközti oldal felezőpontjára, egy szabályos oktaéder csúcsait kapjuk. (2. ábra).



2. ábra