1. Algebrai átalakítások végzésekor gyakran van szükség két- vagy többtagú összeg valamilyen pozitív egész kitevőjű hatványának a kifejtésére. Bár ilyen esetben – konkrét kitevő mellett – az eredmény ismételt beszorzás útján is meghatározható, ez azonban többnyire hosszadalmas számítgatás, ezért – ha lehet – célszerű elkerülni. Kézenfekvő megoldásnak látszik, hogy tipizáljuk a lehetséges feladatokat, és az egyes típusokra kapott végeredményeket próbáljuk általánosítani, minden egyes esetben alkalmazhatóvá tenni.

2. Vizsgáljuk először a kéttagú összegeket. Az eredményben várhatóan nem lesz szerepe annak, hogy az egyes tagoknak van-e valamilyen belső szerkezetük, ezért egy–egy betűvel jelöljük őket, mondjuk a-val és b-vel. Az első néhány hatvány kifejtése a következő:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a^2+ab)+(ab+b^2) = a^2+2ab+b^2,\\
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a^3+a^2b)+(2a^2b+2ab^2)+(ab^2+b^3) =\\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\
(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 = (a^4+a^3b)+(3a^3b+3a^2b^2)+(3a^2b^2+3ab^3)+\\
&\quad +(ab^3+b^4) = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.
\end{aligned}$$

Észrevesszük, hogy $n=2$, 3 és 4 mellett $(a+b)^n$-ben csak olyan a^kb^m típusú szorzatok fordulnak elő, amelyekben $k+m=n$ (k és m természetes szám vagy 0), és ezek mind elő is fordulnak. Célszerű ezeket úgy rendezni, hogy a k és m kitevők monoton változzanak, ezt tettük már a fenti példákban is. Tegyük fel, hogy már meghatároztuk $(a+b)^n$-t, és ez olyan alakú volt, mint a fenti kezdő kifejezések. Jelöljük benne a^kb^m együtthatóját egyelőre $\{k,\, m\}$-mel, ezzel a jelöléssel

$$(a+b)^n = \{n,\,0\}a^n + \{n-1,\,1\}a^{n-1}b + \ldots + \{k,\,n-k\}a^kb^{n-k} + \ldots + \{0,\,n\}b^n, \tag{1}$$

szorozzuk meg ezt $(a+b)$-vel, így kapjuk a következő hatványt:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \{n,\,0\}a^{n+1} + \{n,\,0\}a^nb + \{n-1,\,1\}a^nb + \{n-1,\,1\}a^{n-1}b^2 + \ldots +\\
&+\{k,\,n-k\}a^{k+1}b^{n-k} + (k,\,n-k\}a^kb^{n-k+1} + \ldots + \{0,\,n\}ab^n + (0,\,n\}a^{n+1}.
\end{aligned}\tag{2}$$

Ebben csak olyan a^kb^m típusú szorzatok fordulnak elő, amelyekben $k+m=n+1$, és ezek együtthatói rendre

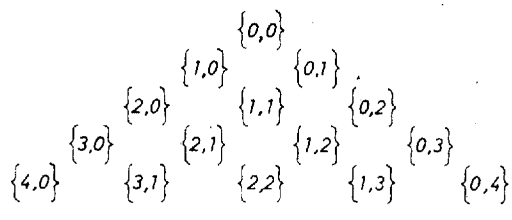
$$\begin{aligned}
\{n+1,\ 0\} &= \{n,\ 0\},\\
\{n,\ 1\} &= \{n,\ 0\} + \{n-1,\ 1\},\\
\{n-1,\ 2\} &= \{n-1,\ 1\} + \{n-2,\ 2\},\\
&\ldots\\
\{1,\ n\} &= \{1,\ n-1\} + \{0,\ n\},\\
\{0,\ n+1\} &= \{0,\ a\}.
\end{aligned}\tag{3}$$

Tetszőleges n-re fennáll, hogy $\{n,\ 0\} = \{0,\ n\} = 1$, hiszen a legmagasabb hatványon szereplő a vagy b minden esetben csak egyféleképpen áll elő, ti. úgy, hogy mind az n tényezőből éppen a-t, illetve b-t választjuk ki. Ez a magyarázata (3) első és utolsó sorának. A többi sor azt fejezi ki, hogy egy a^kb^m alakú tag kétféleképpen állhat elő: úgy, hogy $a^{k-1}b^m$ alakút szorozzuk be az utolsó $(a+b)$ tényező a tagjával, és úgy, hogy az a^kb^{m-1} alakút b-vel.

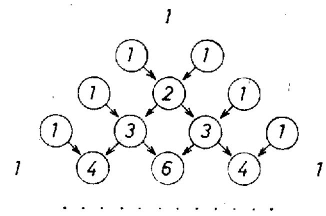
Mivel az $\{1,\ 0\}$ és $\{0,\ 1\}$ együtthatók értéke ismert: 1, azért (3) alapján tetszőleges n-re meghatározhatók az együtthatók, az összefüggések ismételt alkalmazásával.

Megjegyezzük még, hogy a $\{0,\ 0\}$ együtthatót megállapodásszerűen 1-gyel egyenlőnek tekintjük, mivel $(a+b)^0=1$.

3. *B. Pascal* francia matematikustól (1623–1662) származik a következő szellemes ötlet: az együtthatók könnyebb kiszámítása és áttekintése érdekében érdemes őket háromszög alakú táblázatban elrendezni. A háromszög (felső) csúcsában a $\{0,\ 0\}$ érték szerepel, majd ez alatt balra és jobbra ferdén az $\{1,\ 0\}$ és a $\{0,\ 1\}$, és így tovább. A háromszög két szárát csupa 1-es alkotja, alapját pedig az utoljára kiszámított együtthatók, vagyis az eddigi legnagyobb n-hez tartozó együtthatók sorozata. A háromszög „belsejében” álló együtthatók a balra és jobbra ferdén fölöttük álló két–két szám összegeként állnak elő (3) értelmében. Az 1. ábrán a Pascal–féle háromszöget ideiglenes jelöléseinkkel látjuk, a 2. ábrán pedig ugyanazt, de a konkrét számértékek feltüntetésével. (Néhány esetben jeleztük az előállítás módját is.)



1. ábra



2. ábra

Az eddig használt $\{k,\, m\}$ jelöléssel az általános eset tárgyalását kívántuk előkészíteni; ezeknek az együtthatóknak a szokásos jelölése a következő:

$$\{k,\, m\} = \binom{k+m}{k}, \tag{4}$$

olvasd: $(k+m)$ alatta k, vagy még így is: $(k+m)$ a k fölött, és közvetlen kiszámítására is ismeretes összefüggés:

$$\{k,\, m\} = \frac{(k+m)\,!}{k\,!\cdot m\,!} \tag{5}$$

[Itt $n\,!$ – olvasd: n faktoriális – az $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ szorzatnak (a tényezők száma n) egyezményes, rövid jelölése. Megállapodás szerint $0\,!$-on 1-et értünk.]

Az (1) összefüggést *binomiális tétel*nek szokás nevezni, az $\binom{n}{k}$ együtthatót pedig *binomiális együtthatónak* – a „két tag” jelentésű görög *binom* kifejezés alapján.

Lássuk be, hogy az (5) képlet valóban megadja az $\binom{n}{k}$, vagyis a $\{k, n-k\}$ együtthatókat. Az $n=0$ érték mellett ez közvetlen számítással ellenőrizhető:

$$\binom{0}{0} = \frac{0\,!}{0\,!\cdot 0\,!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1.$$

Tegyük fel, hogy már beláttuk az (5) összefüggést minden olyan $(k,\, m)$ párra, melyre $k+m<n$, és legyen most $(k,\, m)$ olyan számpár, melyre $k+m=n$. Ha k vagy m értéke 0, akkor (5) valóban teljesül. Ha $k,\, m$ egyike sem 0, akkor (3) szerint

$$\{k,\, m\} = \{k-1,\, m\} + \{k,\, m-1\}.$$

Ezeket az együtthatókat már számíthatjuk (5) alapján, hiszen $(k-1)+m = k+(m-1) = n-1 < n$, tehát

$$\{k,\, m\} = \frac{(m+k-1)\,!}{(k-1)\,!m\,!} + \frac{(m+k-1)\,!}{k\,!(m-1)\,!} = \frac{(m+k-1)\,!}{k\,!m\,!}(k+m) = \frac{(k+m)\,!}{k\,!m\,!},$$

tehát (5) az olyan $(k,\ m)$ párokra is igaz, amelyekre $k+m=n$. Így lépésről lépésre beláthatjuk (5)-öt az összes szóba jöhető $(k,\, m)$ párra.

4. A binomiális együtthatóknak számos érdekes tulajdonságuk említhető. Az (5) összefüggésből következik például szimmetriájuk:

$$\{k,\, m\} = \{m,\, k\}. \tag{6}$$

Egy másik, gyakran hasznosítható összefüggés a következő:

$$\sum_{i=0}^{n} \{i,\, n-i\} = 2^n. \tag{7}$$

Ezt úgy bizonyíthatjuk be, hogy (1)-be behelyettesítjük az $a=b=1$ értékpárt.

A binomiális együtthatók fontos alkalmazása: az n elem k-ad osztályú kombinációi számának kiszámítása. Ha a feladat annak a meghatározása, hogy n különböző elemből hányféle módon tudunk egy k-elemű csoportot kiválasztani (pl. egy n tanulóból álló osztály képviseletét egy ünnepélyen egy k diákból állócsoport látja el, kérdés, hogy hányféleképpen jelölhető ki az a csoport), a válasz egyszerűen $\binom{n}{k}$, vagyis $\{k,\, n-k\}$

Egy kis képzelőerővel beláthatjuk, hogy ez igaz $n=k=0$ mellett, de kényelmesebb a bizonyítást az $n=1$ esettel kezdeni: egy tanulóból k tagú csoportot $k=0$ mellett is, $k=1$ mellett is egyféleképpen képezhetünk, ti. nem vesszük be az illető tanulót a csoportba, ha $k=0$, és beválasztjuk őt, ha $k=1$. Tegyük fel, hogy már valamilyen n-re beláttuk, hogy tetszőleges $0 \le k \le n$ mellett az n tanulóból kiválasztható k tagú csoportok száma $\{k,\ n-k\}$. Vegyünk $(n+1)$ tanulót, és válasszunk ki közülük egyet. Ha $0 < k < n+1$, tanulóinkból kétféleképpen alakíthatunk ki k tagú csoportot: vagy közéjük vesszük a kiválasztott tanulót, vagy nem. Az első esetben még $k-1$ tanulót kell választanunk, amit a már bizonyított állítás szerint $\{k-1,\ n-k+1\}$-félképpen tehetünk meg, a második esetben még k tanulót kell választanunk, amit $\{k,\ n-k\}$-féleképpen tehetünk meg. Tehát összesen $\{k-1,\ n+1-k\} + \{k,\ n-k\}$ a lehetőségek száma, és ez (3) szerint épp $\{k,\ n+1-k\}$. A még meg nem vizsgált $k=0$ és $k=n+1$ esetben $\{k,\ n+1-k\} = 1$, és – mint az közvetlenül látható – ennyi a lehetséges választások száma is.

5. A kéttagú összeg hatványainak kifejtésére szolgáló módszer ismeretében felmerülhet a kérdés, vajon általánosabb esetben, három és több tag esetén léteznek-e hasonló eljárások.

Vizsgáljuk először a háromtagú összegek esetét. Jelölje az $a^k b^m c^s$ típusú tagok együtthatóját a két tagnál bevezetett jelölés analógiájára $\{k, m, s\}$. Tegyük föl, hogy $k+m+s=n$-re már ismertek ezek az együtthatók. ($n=1$-re mindhárom együttható 1-gyel egyenlő, ismert.) Hogyan határozhatók most meg az $(n+1)$-ik hatványban szereplő együtthatók?

Nézzük meg $(a+b+c)^n$-nek $(a+b+c)$-vel történő szorzása során egy konkrét k, m, s kitevő hármashoz tartozó tag milyen, az n-ik hatványban szereplő tagokból keletkezhet.

Legyen először k, m, $s > 0$. Ekkor három lehetőség van, az

$$a^{k-1}b^m c^s, \qquad a^k b^{m-1} c \qquad \text{és} \qquad a^k b^m c^{s-1}$$

alakok valamelyikéből áll elő $a^k b^m c^s$. A kérdéses együttható a fenti három különböző típusú tag együtthatóinak összegeként áll elő ugyanúgy, mint két tag esetén $(a+b)^{n+1}$ együtthatói két egymás utáni, $(a+b)^n$-beli tag együtthatójának összegeként. Eszerint:

$$\{k,\ m,\ s\} = \{k-1,\ m,\ s\} + \{k,\ m-1,\ s\} + \{k,\ m,\ s-1\}. \tag{8}$$

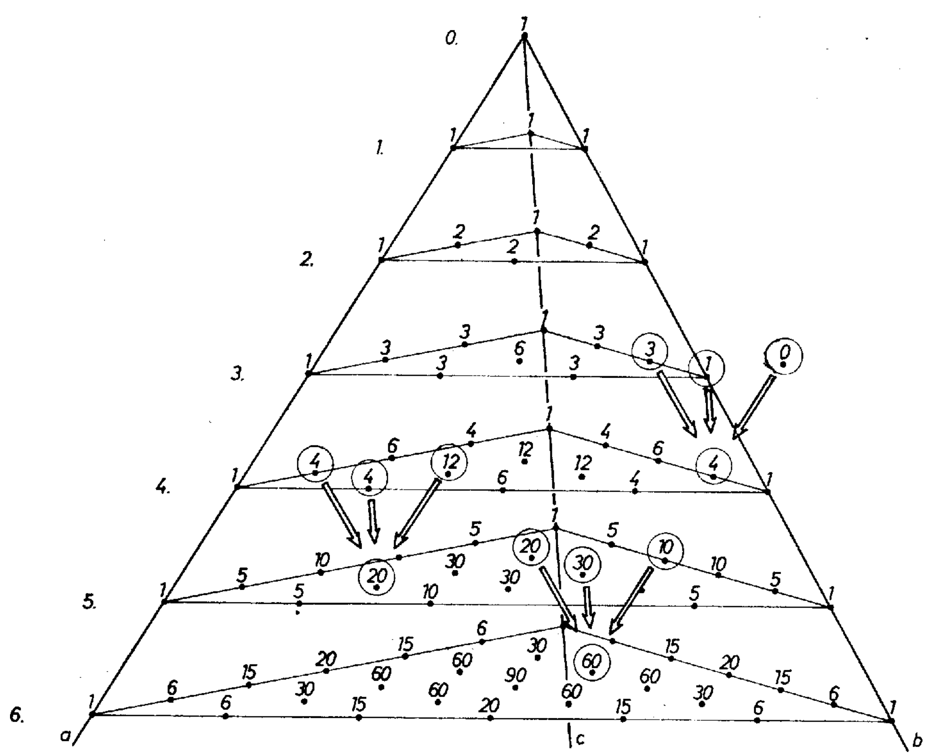
Ha viszont a k, m, s kitevők valamelyike eltűnik, pl. $k=0$, akkor az egyik fenti lehetőség már nincs meg, a^{k-1}-et tartalmazó tag nem létezik. Ekkor:

$$\{0,\ m,\ s\} = \{0,\ m-1,\ s\} + \{0,\ m,\ s-1\}. \tag{9}$$

Ez utóbbi szabály megegyezik a két tag esetében alkalmazott képzési szabállyal, hiszen itt tulajdonképpen valamelyik tag (jelen esetben az a) figyelmen kívül hagyásáról van szó.

Végül ha egyszerre két kitevő egyenlő nullával, akkor az együttható természetesen 1. Tartalmazni fogja (8) ezeket az eseteket is, ha megállapodunk abban, hogy $\{k,\ m,\ s\} = 0$ minden olyan esetben, ha k, m, s valamelyike negatív.

6. A Pascal–háromszöghöz hasonlóan háromtagú összeg hatványozása esetére is elrendezhetők az együtthatók egy egyszerű geometriai alakzatban: tetraéderben. Nevezzük ezt Pascal–tetraédernek. Csúcsa $\{0,\ 0,\ 0\} = 1$. A tetraéder oldallapjait Pascal–háromszögek alkotják, belső elemei pedig a mindhárom tényezőt valóban tartalmazó tagok együtthatói. A 3. ábrán $n=6$-ig láthatók a kiszámított konkrét értékek tetraéderbe rendezve, három esetben a (8) szerinti képzést is feltüntettük.



3. ábra

Bármeddig szemléljük azonban ezt a tetraédert, nem tudjuk leküzdeni csalódottságunkat. Mint mondtuk, Pascal eredeti ötlete binomiális együtthatók kényelmes kiszámítását szolgálta, és épp ez az, amit nem mondhatunk el a tetraéderünkről. Mégpedig azért nem, mert hiába születtünk térbeli lényeknek, írni csak síkban tudunk, legalábbis a szokásos feltételek mellett, különösebb technikai előkészületek nélkül. Ha síkban akarjuk elhelyezni az együtthatóinkat, akkor le kell mondanunk arról, hogy egyszerre mindent lássunk. Meg kell elégednünk azzal, hogy azokat a $\{k,\ m,\ s\}$ együtthatókat rendezzük egymás mellé, amelyekre a $k+m+s$ összeg ugyanaz az n szám, majd előállítsuk belőlük azokat, amelyekre ez az összeg $(n+1)$. Mint látni fogjuk, más már nem fér el a papirosunkon (talán még az $(n+2)$-höz tartozó együtthatók elférnének, de több már igazán nem).

Kezdjük azzal, hogyan lehet számhármasokat a síkon elhelyezni. Válasszunk három egységvektort: **e**, **f**, **g**, amelyek páronkénti szöge rendre 120°-os. Tetszőleges $(k,\ m,\ s)$ számhármashoz rendeljük hozzá a $\mathbf{v}=k\mathbf{e}+m\mathbf{f}+s\mathbf{g}$ vektort, és egy rögzített origó mellett írjuk a $\{k,\ m,\ s\}$ együtthatót a $\mathbf{v}$ helyvektorú pontba. Megmutatjuk, hogy ha csak azoknak a $(k,\ m,\ s)$ számhármasoknak megfelelő pontokat jelöljük ki, amelyekre a $k+m+s$ összeg ugyanaz az n szám, akkor különböző számhármasokhoz különböző pontokat rendelünk. Az **e**, **f**, **g**, vektorok választása miatt ugyanis $\mathbf{e}+\mathbf{f}+\mathbf{g}=\mathbf{0}$, emiatt $\mathbf{v}=(k-s)\mathbf{e}+(m-s)\mathbf{f}$, és mivel az **e**, **f** vektorokkal már minden (az általuk meghatározott síkban levő) vektort egyértelműen állíthatunk elő, itt a $(k-s)$, $(m-s)$ különbségek egyértelműen meghatározottak. Ha viszont adott $k+m+s=n$, $k-s=a$, $m-s=b$, akkor k, m, s értéke már egyértelműen meg van határozva:

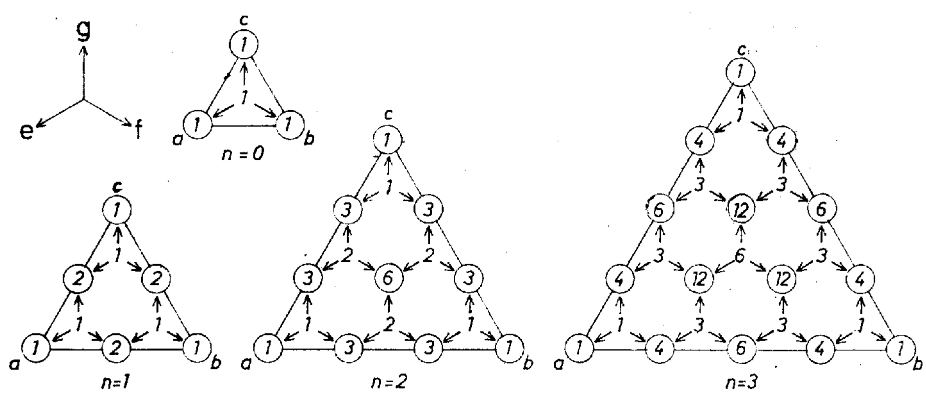
$$k=\frac{n+2a-b}{3},\qquad m=\frac{n-a+2b}{3},\qquad s=\frac{n-a-b}{3}.$$

Tapasztalni fogjuk, hogy ha valamely n összeg mellett csak egész $(k,\ m,\ s)$ számhármasoknak megfelelő pontokat jelölünk ki a síkon, akkor még azok a $(k,\ m,\ s)$ hármasok is új pontokat határoznak meg, amelyekre $k+m+s=n+1$, vagy $k+m+s=n+2$.

Tegyük fel tehát, hogy valamilyen n mellett már kiszámítottuk és elhelyeztük a síkon az együtthatóinkat. Az $(n+1)$ kitevőhöz tartozó együtthatókat (8) alapján kívánjuk kiszámítani, ehhez valóban elég az n-hez tartozó együtthatókat ismerni. Vizsgáljuk meg, melyek azok az új együtthatók, amelyek számításához az n kitevőhöz tartozó $\{k,\ m,\ s\}$ együtthatót kell felhasználnunk. (8)-ból kapjuk, hogy ezek a következők:

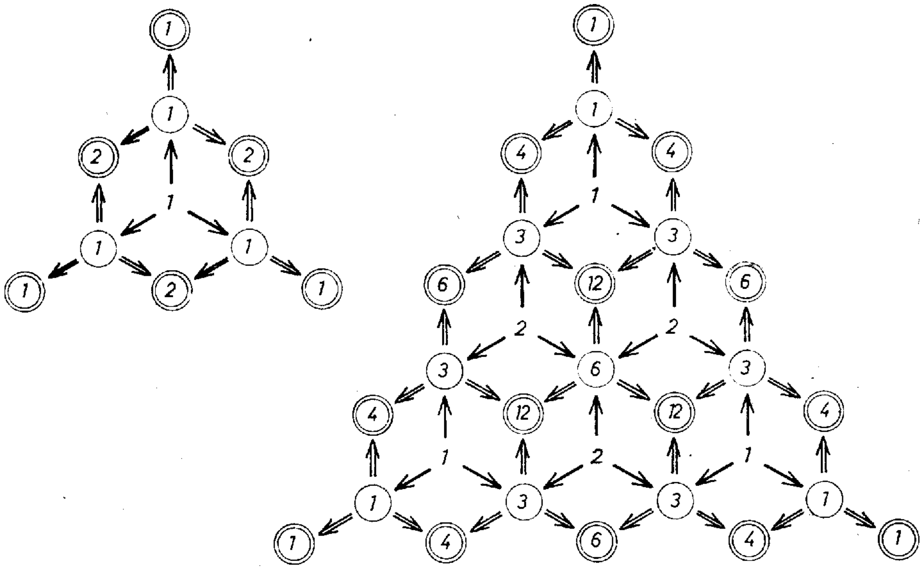
$$\{k+1,\ m,\ s\},\quad \{k,\ m+1,\ s\},\quad \{k,\ m,\ s+1\}.$$

Megállapodásunk szerint ezek helyét $\{k,\ m,\ s\}$ helyéből úgy kapjuk meg, hogy $\{k,\ m,\ s\}$ helyvektorához rendre az **e**, **f**, **g** egységvektort adjuk. Így lépésről lépésre megkapjuk az új együtthatók helyét a régi együtthatók helyéből, az együtthatók értékét pedig (8) alapján számíthatjuk ki. Tekintve, hogy adott $(n+1)$ összeg mellett különböző számhármasokhoz különböző síkbeli pontot rendeltünk, ha valamely új szám helyét több régi számból kiindulva is megkaphatjuk, akkor az a szám összege lesz mindazoknak, amelyekből a helye meghatározható. Hiszen a kapott helyhez csak egy együttható tartozik, tehát a helyét kijelölő régi számok mindegyike ugyanannak az együtthatónak a komponense. Eszerint rendre összegeznünk kell az új helyeken mindazokat a régi számokat, amelyek az illető helyet kijelölték.



4. ábra

A 4. ábrán bemutatjuk eljárásunkat az $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$ kitevők mellett, az $(n+1)$ kitevőhöz tartozó együtthatókat bekarikáztuk. Ezeket az új együtthatókat másoltuk át a következő lépés ábrájába, ahol (már mint régi együtthatók) karikázás nélkül szerepelnek. A 4a ábrán egy gazdaságosabb megoldást mutatunk be, ebben két–két lépést végzünk el egyszerre. Itt a második lépést kettős nyilak, illetve kettős körök jelölik.



4a. ábra

Hasonlóan (5)-höz, három tag esetén is megadható a $\{k,\ m,\ s\}$ közvetlen kiszámítására szolgáló képlet:

$$\{k,\ m,\ s\} = \frac{(k+m+s)\,!}{k\,!m\,!s\,!}. \tag{10}$$

Ennek bizonyítását az olvasóra bízzuk.

7. E két speciális eset vizsgálata után foglalkozzunk röviden az általános problémával. A cél az $(a_1+a_2+\ldots+a_r)^n$ hatványban szereplő egyes tagok együtthatóinak meghatározása.

Az általános esetben is megadható a (3)-hoz, illetve a (8)-hoz hasonló rekurzív képlet:

$$\begin{aligned}\{k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r\} = \{k_1-1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r\} + \{k_1,\ k_2-1,\ \ldots,\ k_r\} + \ldots + \\ + \{k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r-1\}.\end{aligned} \tag{11}$$

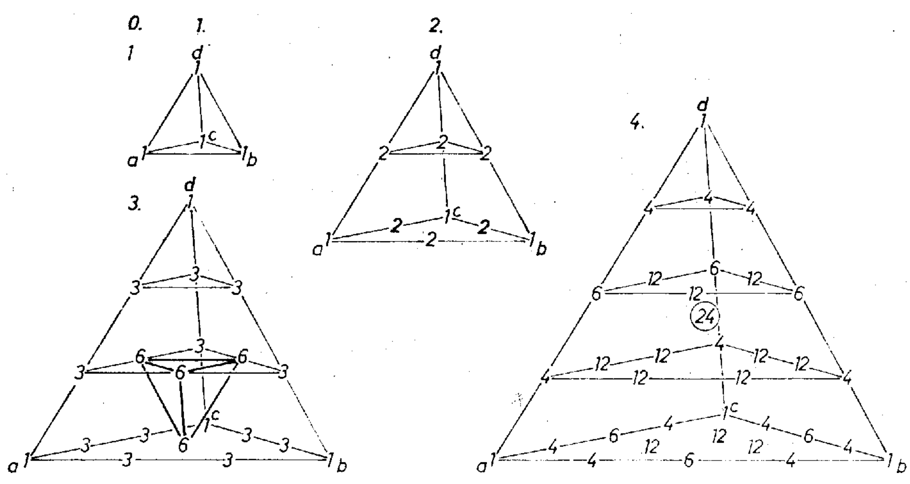
Ha itt is megállapodunk abban, hogy $\{k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r\} = 0$ minden olyan esetben, ha valamelyik k_r negatív, akkor (11) érvényes az összes szóba jövő együttható meghatározására. E képlet ugyanazzal a meggondolással látható be, mint amelyet a speciális $r=2$ és 3 esetekben alkalmaztunk.

Végül (10) általános formája:

$$\{k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r\} = \frac{(k_1+k_2,\ldots,+k_r)\,!}{k_1\,!k_2\,!\ldots,\ k_r\,!} \tag{12}$$

(12) igazolását is az olvasóra hagyjuk. A hatvány kifejtését *polinomiális tétel*nek nevezik, (12) jobb oldalát pedig *polinomiális együttható*nak, a görög „sok tag” kifejezésből.

Már az $r=4$ esetben sem készíthető könnyen áttekinthető geometriai alakzat az együtthatókból, hiszen azok elhelyezéséhez 4 dimenziós térre kellene gondolnunk (és azt 2 dimenzióban lerajzolnunk). A 4. ábrasorozatnak megfelelő eljárás azonban – kis ügyességgel – itt is elvégezhető. A háromszögek helyett itt tetraéderek rajzolandók. A következő tetraéder elemeinek az előző ábrába való beírása már nem célszerű, mert az áttekinthetőség rovására megy.



5. ábra

Az 5. ábrán bemutatjuk $n = 4$-ig $(a+b+c+d)^n$ kiszámított együtthatóit, egy esetben megjelölve azt a kis tetraédert, amelynek csúcsaiban levő elemek összegezésével a bekarikázott elem megadható. Eszerint $(a+b+c+d)^4$ kifejtésében az $abcd$ szorzat együtthatója 24.

8. Befejezésül vizsgáljuk meg röviden a polinomiális tétel, illetve a polinomiális együtthatók egy érdekes, valószínűségszámítási vonatkozását.

Valamilyen kísérletnek r különböző kimenetele lehet: $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Ismerjük az egyes kimenetelek bekövetkezési valószínűségeit is, ezek rendre: $p_1, p_2, \ldots, p_r$, ahol $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$. Végezzük el n-szer egymás után a kísérletet, és az egyes kísérletek legyenek függetlenek. Ekkor az a_i-k valamilyen n hosszúságú sorozatát kapjuk, pl.:

(13)
$$\underbrace{a_2,\, a_1,\, a_1,\, a_5,\, a_3,\, a_2,\, \ldots,\, a_2.}_{n \text{ db}}$$

A feladat azon P valószínűség megadása, hogy e sorozatban a_1 pontosan k_1-szer, a_2 pontosan k_2-ször s i. t. fordul elő, ahol $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r = n$.

Vizsgáljuk először az alábbi speciális kedvező sorozatot:

(14)
$$\underbrace{a_1,\, \ldots,\, a_1,}_{k_1 \text{ db}}\, \underbrace{a_2,\, \ldots,\, a_2,}_{k_2 \text{ db}}\, \ldots,\underbrace{a_r,\, \ldots,\, a_r.}_{k_r \text{ db}}$$

Ennek bekövetkezési valószínűsége a megfelelő valószínűségek szorzata, hiszen feltevésünk szerint az egyes kísérletek függetlenek:

(15)
$$pk_1,\, k_2, \ldots\, k_r = p_1^{k_1} p^{k_2} \,\ldots\, p^{k_3}.$$

(14) azonban csak egy a kedvező esetek közül, hiszen ennek tetszőleges összekeverésével (permutációjával) kapott sorozat is megfelelő lesz, és ezek valószínűsége egyenlő a fenti szorzattal. Számítsuk ki az összes kedvező esetek számát. Először különböztessük meg képzeletben egymástól az azonos indexű tagokat is – pl. egy második index hozzátevésével –, és állapítsuk meg, ekkor hányféle sorrend lehetséges. Ha sorba akarjuk rakni az így kapott n különböző elemet, az első helyre n szabad választási lehetőség van. A másodikra már csak $(n-1)$, hiszen egy elemet már elhelyeztünk. A sor folytatható, míg végül az utolsó helyre már csak egy lehetőség marad. Eszerint $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ az összes lehetséges sorbaállítások száma. Most vegyük figyelembe, hogy a k_1 db a_1 elemet csak átmenetileg tekintettük különbözőnek. Egy tetszőleges kedvező sorozatban vizsgáljuk meg az a_1-esek helyét. Számoljuk meg az összes olyan sorozatokat, amelyekben minden elem megegyezik, csak az a_1-esek vannak felcserélve egymás között. Ezeknek száma éppen annyi, ahányféleképpen k_1 db a_1-est egymás között permutálhatunk; vagyis $k_1\,!$-sal el kell osztani az előbb kapott számot, mivel minden tényleges esetet $k_1\,!$-szor vettünk figyelembe. Most végezzük el ugyanezt a gondolatmenetet a többi a_i-vel is $(i = 2, 3\, \ldots, r)$ így a keresett permutációszám:

$$\frac{n\,!}{k_1\,! k_2\,! \ldots\, k_r\,!}.$$

Ez azonban (12) szerint éppen $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$-rel egyenlő.

A keresett P valószínűség a kedvező esetek valószínűségeinek (esetünkben egyenlő valószínűségeknek) az összegezésével adódik:

(16)
$$P = \{k_1, k_2, \ldots, k_r\} \cdot p_{k_1, k_2, \ldots k_r} = \{k_1, k_2, \ldots, k_r\} p_1^{k_1} p_2^{k_2 \cdots} p_r^{k_r}.$$

Megfigyelhető, hogy az egyes $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ r-esekhez tartozó valószínűségeket (rögzített p_i-k mellett) a $(p_1 + p_2 + p_r)^n$ polinomiális hatvány megfelelő k_i-khez tartozó tagjai adják meg. E valószínűségeket együttesen *polinomiális valószínűségeloszlás*nak nevezzük.

Az itt vizsgált problémák formális egyezése természetesen arra vezethető vissza, hogy tulajdonképpen ugyanarról a kombinatorikai alapfeladatról van szó, r különböző elemből képzett n-es sorozatokat kell összeszámolni.