A feladatot tavaly márciusban tűztük ki, és én csak akkor tudtam meg, hogy hibás, amikor a kezembe került az anyag nálunk szokásos (sajnos, igen lassú) forgása szerint az ún. „mintamegoldás” (amit a dolgozatok kiértékelője ír a legjobb dolgozatok alapján).

Ekkor kezdtem el foglalkozni a feladattal, és hadd mondjam most el az egészet abban a sorrendben, ahogy történt. Úgy érzem ugyanis, hogy ebben az esetben is fontosabb az eredménynél maga az az út, amelyen eljuthatunk hozzá, és én épp ezt az utat szeretném megmutatni. Az eredeti kitűzés szövege ez volt:

Egy a oldalú négyzet csúcsai rajta vannak egy t területű konvex sokszög határvonalán. Bizonyítsuk be, hogy a sokszög tartalmaz egy legalább t/a hosszúságú szakaszt.

Szóval, ha még a sokszög átmérőjét – azaz két egymástól legtávolabbi csúcsának távolságát – d-vel jelöljük, akkor az állítás szerint a

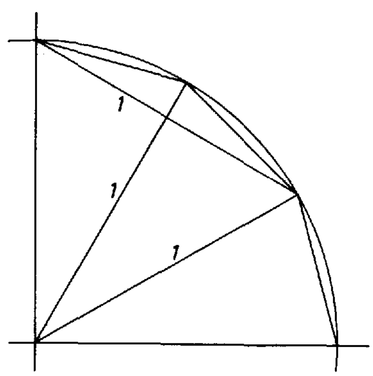
$$\lambda = \frac{t}{ad}$$

hányados értéke legfeljebb 1. – Érkezett 112 dolgozat, ezek közül 90 jó ellenpéldát ad az állításra, a többi 22 dolgozat hibás. Az utóbbiak szerzője vagy „bebizonyítja” az állítást, vagy rossz ellenpéldát ad meg. A jó megoldások közül a feldolgozó hiányosnak mondta azokat, amelyek a kört hozták fel ellenpéldának, hiszen a feladatban sokszögről van szó. Ha mégis kiterjesztjük a vizsgálatunkat tetszőleges konvex görbére, akkor kétségtelenül a kör a legegyszerűbb ellenpélda. Ha ugyanis a sugár egységnyi, akkor $t = \pi$, $a = \sqrt{2}$, $d = 2$, tehát

$$\lambda_{\text{kör}} = \frac{\pi}{\sqrt{8}} = 1{,}11.$$

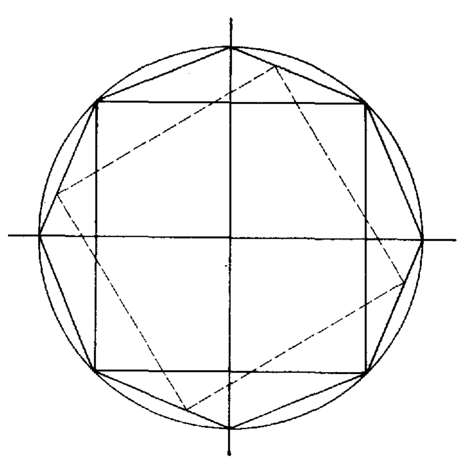
Konvex sokszögek körében a legegyszerűbb ellenpéldát a szabályos 12-szög adja (1. ábra): ha most is a körülírható kör sugarát választjuk egységnek, és a sokszöget 12 cikkre vágjuk, e cikkek közül két szomszédos együtt olyan négyszöget ad, amelyiknek az átlói merőlegesek egymásra, egységnyiek, tehát két cikk területe $1/2$, így $t = 3$, és a és d ugyanannyi, mint az előbb:

$$\lambda_{12-\text{szög}} = \frac{3}{\sqrt{8}} = 1{,}06.$$



1. ábra

Hasonlóan számolva a szabályos nyolcszögben t-re éppen $\sqrt{8}$-at kapunk, ez tehát látszólag már nem volna ellenpélda (2. ábra).



2. ábra

Vegyük észre azonban, hogy a nyolcszögünkbe nemcsak $\sqrt{2}$ oldalú négyzetet írhatunk (amelynek csúcsai a nyolcszög csúcsai közül valók), hanem annál kisebbeket is, például olyat, amelynek a csúcsai: a nyolcszög minden második oldalfelező pontja. Ha pedig $t = \sqrt{8}$, $d = 2$, és $a < \sqrt{2}$, akkor $\lambda > 1$, tehát – alkalmasan választott beírt négyzet mellett – a szabályos nyolcszög is ellenpéldát ad. (Választhattunk volna a szabályos 12-szög esetében is ilyen, oldalfelezőpontokra támaszkodó beírt négyzetet, ebben az esetben λ még nagyobb volna, azonban a kör λ-jánál nem volna nagyobb.)

Tovább menve azt kapjuk, hogy még a szabályos ötszög is ad ellenpéldát:

$$\lambda = \frac{5-\sqrt{5}}{8}\left(1+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right) = 1{,}01.$$

Viszont, ha a négyzet köré írt sokszög háromszög, akkor igaz az eredeti állítás, hiszen – mivel csak három oldal áll rendelkezésünkre – egy háromszögoldalon két négyzetcsúcs is van, és ha ezt az oldalt tekintjük alapnak, hosszát b-vel jelöljük, és a hozzá tartozó magasságot m-mel, akkor – mint az könnyen látható –

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{m},$$

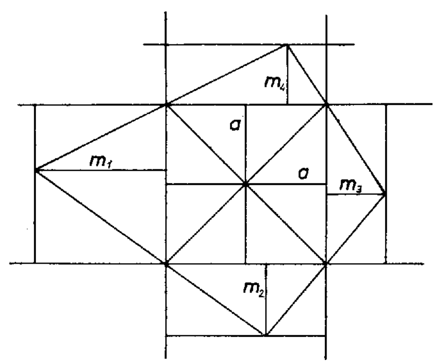
és emiatt

$$\lambda = \frac{bm}{2ad} = \frac{b+m}{2d} = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{d}+\frac{m}{d}\right) < 1,$$

hiszen $b \le d$ és $m < d$. Sőt még négyszögre is könnyen igazolható az állítás – legalábbis abban az esetben, ha a négyszög mindegyik oldalán egy négyzetcsúcs van. Ekkor ugyanis a négyszög csúcsainak a négyzet oldalaitól mért távolságát rendre m_1-gyel, m_2-vel, m_3-mal, m_4-gyel jelölve, a 3. ábra szerint

$$2t = (m_1+m_2+m_3+m_4)a + 2a^2 = a(m_1+a+m_3) + a(m_2+a+m_4) \le 2ad,$$

hiszen az első csúcsból a harmadikba menve, utunknak az átmetszett négyzetoldalakra merőleges vetülete $m_1 + a + m_3$, tehát a két csúcs távolsága legalább ennyi, a négyszög átmérője viszont nyilván nem lehet kisebb e két csúcs távolságánál.



3. ábra

Tehát $m_1 + a + m_3 \le d$, és hasonlóan kapjuk, hogy $m_2 + a + m_4 \le d$.

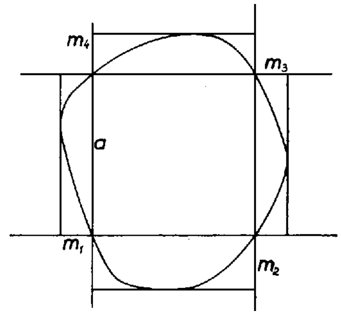
Ennyi derült ki a dolgozatokból. Bántott a dolog, mert ha volt is rá példa, hogy hibás feladatot tűztünk ki, ezt most észrevehettük volna. De ha már kitűztük ezt a példát, szerettem volna tudni, hogy mi is az igazság ezzel a λ-faktorral kapcsolatban. Elkezdtem tehát három irányban tapogatózni:

a) hogyan lehet a négyszögre vonatkozó állítást bizonyítani abban az esetben, ha egy négyszögoldalon két négyzetcsúcs van (mert abban valahogy egy percig sem kételkedtem, hogy négyszögekre még nem lehet a λ értéke 1-nél nagyobb);

b) milyen – tetszőleges konvex görbére érvényes – felső becslés adható λ-ra (mert ha ilyet találok, legalább utólag tudom, mit kellett volna kitűzni);

c) igaz-e, hogy λ a körre maximális (mert hát valahogy megszokta az ember, hogy nagyon sok ilyen kérdésben a kör az extremális).

Ezek közül a *b)* kérdésre volt a legkönnyebb válaszolni: ha meghúzzuk a görbének a négyzetoldalakkal párhuzamos támaszegyeneseit (azaz a négyzet oldalait addig mozgatjuk, irányukat megtartva, amíg még van közös pontjuk a konvex görbével), és ezeknek a négyzetoldalaktól mért távolságait rendre m_1-gyel, m_2-vel, m_3-mal, m_4-gyel jelöljük, akkor a konvex idomnak a négyzetből kilógó részeit egy-egy téglalapba foglaltuk be, és e részek területét becsülhetjük a téglalapok területével (4. ábra):



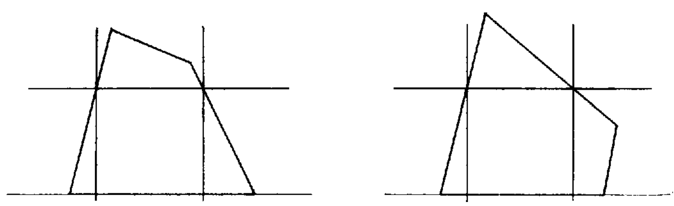
4. ábra

$$t \le (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)a + a^2 = a(m_1 + a + m_3) + a(m_2 + a + m_4) - a^2 \le$$
$$\le 2ad - a^2 = \left(2 - \frac{a}{d}\right) ad,$$

hiszen most is $m_1 + a + m_3 \le d$ és $m_2 + a + m_4 \le d$, tehát tetszőleges konvex görbére igaz, hogy

$$\lambda = \frac{t}{ad} \le 2 - \frac{a}{d}.$$

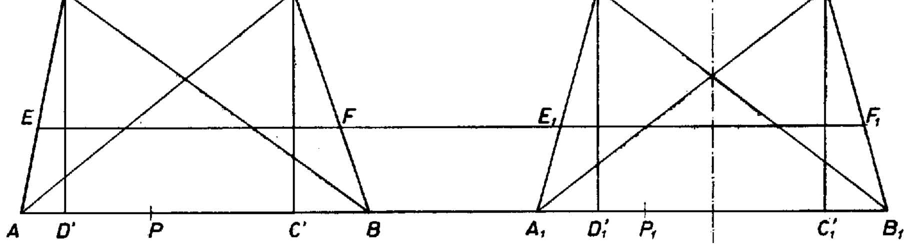
Azt is aránylag könnyen lehet látni, hogy ha d túl nagy, mondjuk $d \ge 3a$, akkor $\lambda \le 1$, tehát a még tisztázatlan $d < 3a$ esetben egyenlőtlenségünk tovább javítható, ha benne d helyére $3a$-t írunk; így kapjuk, hogy $\lambda \le 5/3$. Valószínűleg még ez is tovább javítható, az viszont világos volt előttem, hogy ezen az úton soha el nem jutok a körig (még ha bizonyos „hevenyészett” meggondolások alapján a $\lambda \le 1{,}17$ egyenlőtlenség sem látszott bizonyíthatatlannak). Na jó, mondtam magamnak, a *c)* kérdés számomra túl nehéz, de legalább az *a)*-ra illene válaszolnom. Elkezdtem tehát a négyszögre még tisztázatlan másik két esetet számolni (5. ábra), és számoltam körülbelül egy hónapon át.



5. ábra

Ördög tudja miért, minden kézzelfogható eredmény nélkül. Ez viszont már határozottan bosszantott. Bánatomban elmeséltem mindenkinek a dolgot, akivel csak találkoztam. Köztük Vincze Istvánnak is, akivel a Matematikai Kutató Intézetben dolgozom együtt. Ő mondta nekem: lehet, hogy sok mindent próbáltál már, de az, hogy szimmetrizálj, még biztosan nem jutott eszedbe. Pedig, nézd csak, ha van két párhuzamos szakaszod, és eltolod őket úgy, hogy szimmetrikusak legyenek, akkor az átmérő kisebb lesz. Sok esetet tudok, amikor ez a szimmetrizálás volt a megoldás kulcsa. Ezek közül talán a leghíresebb az izoperimetrikus probléma, amiről Dörrie „A diadalmas matematika” című könyvében is olvashatsz.

Erre valóban nem gondoltam. És csakugyan, ha AB, CD voltak az eredeti szakaszok, és csúcsaikat e körüljárás szerint bejárva kapunk konvex trapézt, továbbá $AC \le BD$, akkor abban az egyenlő szárú $A_1B_1C_1D_1$ trapézban, amelyben $A_1B_1 = AB$, $C_1D_1 = CD$ és A_1, B_1 az AB egyenesen, C_1, D_1 a CD egyenesen van (6. ábra):



6. ábra

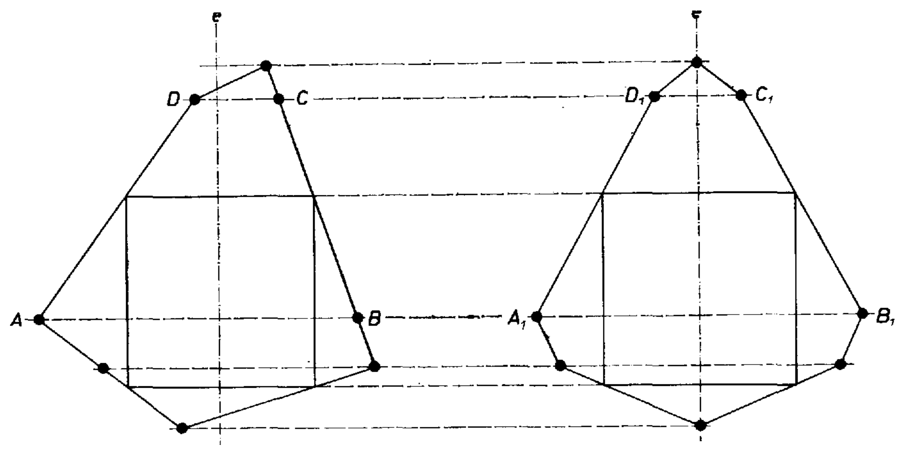
$$AC \leq A_1C_1 = B_1D_1 \leq BD,$$

hiszen a C, D, C_1, D_1 pontoknak az AB egyenesen levő vetületét C'-vel, D'-vel, C_1'-vel, D_1'-vel jelölve

$$AC' \leq A_1C_1' = \frac{AC' + BD'}{2} = B_1D_1' \leq BD',$$

és a vetületek négyzetéhez még hozzá kell adnunk az AB, CD egyenesek távolságának a négyzetét, hogy az eredeti átlók négyzetét kapjuk.

Végezzük el ennek alapján a négyzet köré írt sokszögön a következő – szimmetrizálásnak nevezett – átalakítást (7. ábra).



7. ábra

Legyen e a négyzetnek egyik oldalával párhuzamos szimmetriatengelye, és vágjuk szét trapézokra a négyzet köré írt sokszöget a csúcsain átmenő, e-re merőleges egyenesekkel (a két szélen esetleg keletkező háromszögeket tekintsük az egyöntetűség kedvéért olyan trapéznak, amelynek két csúcsa azonos). Toljuk el e trapézok e-re merőleges oldalait e-re merőleges irányban úgy, hogy új helyzetükben e-re szimmetrikusak legyenek, és tekintsük az új szakaszok által meghatározott, egyenlő szárú trapézokból összerakható sokszöget. Megmutatjuk, hogy

α) az új sokszög is konvex,
β) a területe egyenlő az eredeti sokszög területével,
γ) az átmérője az eredeti átmérőnél kisebb, esetleg egyenlő vele, és
δ) a négyzet csúcsai az új sokszög határvonalán is rajta vannak.

Ha ugyanis $ABCD$ a szétvágással keletkezett trapézok egyike, és E az AD egyenes tetszőleges pontja, F pedig az E-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenesnek BC-n levő pontja (6. ábra), akkor EF eltoltja az E-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenesnek A_1D_1, B_1C_1 közti E_1F_1 szakasza. Ha már EF szimmetrikus volt e-re, akkor E_1 azonos E-vel, F_1 pedig F-fel. Így van ez, ha EF a négyzet e-re merőleges oldala, tehát a négyzet csúcsai az új sokszögvonalon is rajta lesznek. (Ezzel beláttuk a δ állítást.)

Az $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ trapézok területe egyenlő, tehát a sokszögek területe is egyenlő. (Ezzel beláttuk a β állítást.)

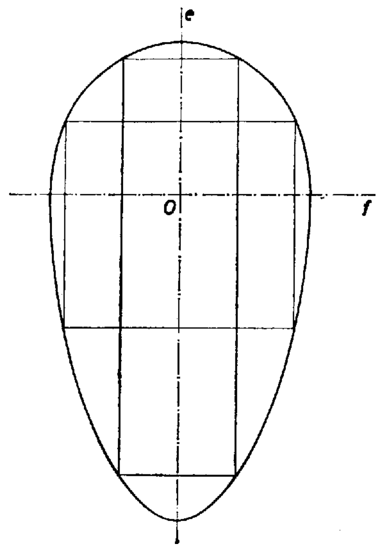
Legyen P_1 és Q_1 az új sokszög két belső pontja, és legyen most A_1B_1, illetve C_1D_1 a P_1-en, illetve Q_1-en átmenő, e-re merőleges húr az új sokszögben, ABp, CD pedig az eredeti sokszögnek az A_1B_1, C_1D_1 egyeneseken levő húrja. Az $ABCD$ trapéz benne van az eredeti sokszögben, emiatt $A_1B_1C_1D_1$ is része az új sokszögnek, hiszen tetszőleges, AB-vel párhuzamos EF húrt tartalmazó szakasz szimmetrizáltja tartalmazza EF szimmetrizáltját, E_1F_1-et. Emiatt P_1Q_1 benne van az új sokszögben, ez tehát konvex. (Ez volt az a állításunk.)

Végül a még nem bizonyított γ állítás következik abból, hogy $P_1Q_1 \leq A_1C_1 \leq BD$ miatt a P_1Q_1 szakasz hossza nem lehet nagyobb, mint az eredeti sokszög valamely alkalmasan választott szakaszának a hossza. Ha tehát az eredeti sokszög területe t, átmérője d, és az újban ugyanezek az adatok t_1 és d_1, akkor $t_1 = t$ és $d_1 \leq d$, és így

$$\lambda = \frac{t}{ad} \leq \frac{t_1}{ad_1} = \lambda_1.$$

Elég tehát az e-re szimmetrikus konvex sokszögeket vizsgálni.

Legyen f a négyzet e-re merőleges szimmetriatengelye. Ismételjük meg az eljárásunkat, e szerepére most f-et választva, az új sokszög f-re is szimmetrikus lesz, és e-re szimmetrikus marad. Ez azért van így, mert az e-re szimmetrikus sokszög f-re merőleges húrjainak e-re vonatkozó tükörképei ismét húrok, és ezek az e-re szimmetrikus húrpárok az f-re vonatkozó szimmetrizálás során úgy mozdulnak el, hogy közben e-re szimmetrikusak maradnak (8. ábra).

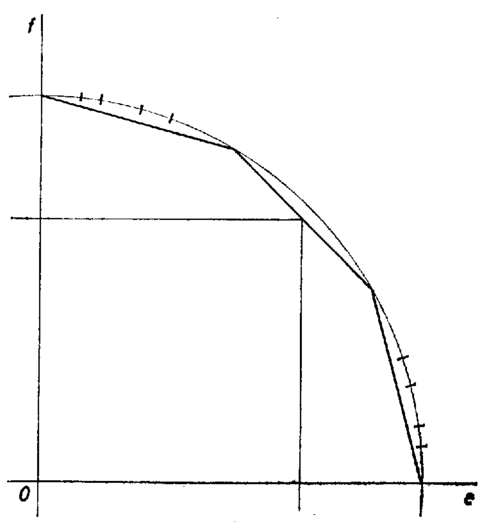


8. ábra

Elég tehát e-re is, f-re is szimmetrikus sokszögeket vizsgálni – ezek viszont centrálszimmetrikusak, centrumuk e és f metszéspontja, a négyzet O centruma. Ekkor viszont a sokszög átmérője akkor és csakis akkor d, ha benne van az O körüli, $r = d/2$ sugarú körben, és e körön is van csúcsa. Ha most a négyzet oldalát választjuk egységnek, akkor nyilván $d \geq \sqrt{2}$. Ha $d = \sqrt{2}$, a sokszög benne van a négyzet köré írható körben, és így $t \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\lambda \leq \frac{\pi}{\sqrt{8}};$$

A kör tehát valóban extremális – ha $d = \sqrt{2}$. Ha azonban $d > \sqrt{2}$, akkor λ értéke még nagyobb lehet. Írjunk például szabályos 12-szöget a négyzet köré úgy, hogy a négyzet csúcsai oldalfelezőpontok legyenek. Ekkor ugyan $d = 4\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$, $t = \frac{3}{4}d^2$, és így – mint már említettük – λ még nem lépi túl $\lambda_{\text{kör}}$ értékét.



9. ábra

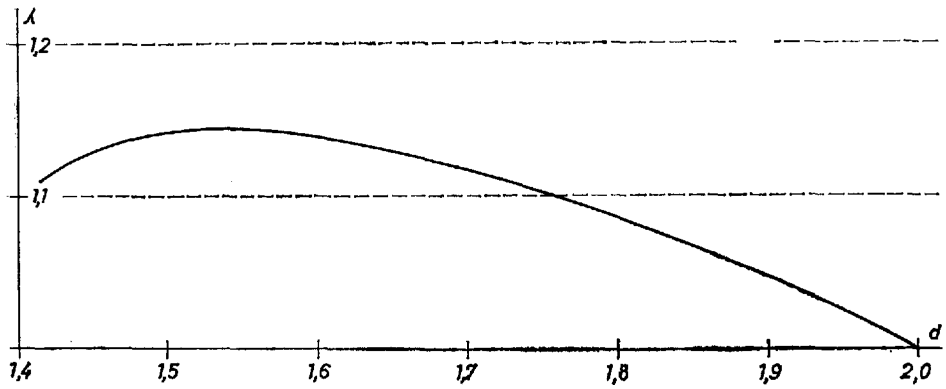
Ha viszont a 12-szög köré írható körnek a 12-szög e és f tengelyekhez csatlakozó oldalai feletti ívein újabb csúcsokat veszünk fel (9. ábra), t tovább nő, egészen

$$t = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}d^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{3 + 2\pi}{12}d^2$$

értékig, és ekkor már

$$\lambda = \frac{t}{ad} = \frac{3 + 2\pi}{12}d = \left(1 + \frac{2\pi}{3}\right)\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1{,}13,$$

ami nagyobb, mint a kör λ-ja. Belátható, hogy emellett a d mellett ez a λ maximális, és hogy $\sqrt{2} < d < 2$ mellett hasonlóan kapjuk az extremális elrendezést. A megfelelő λ értékeket a 10. ábra mutatja, amelyről leolvasható, hogy a maximális λ két tizedesre 1,14. Ha azonban $d \geq 2$, akkor mindjárt belátjuk, hogy $\lambda \leq 1$.

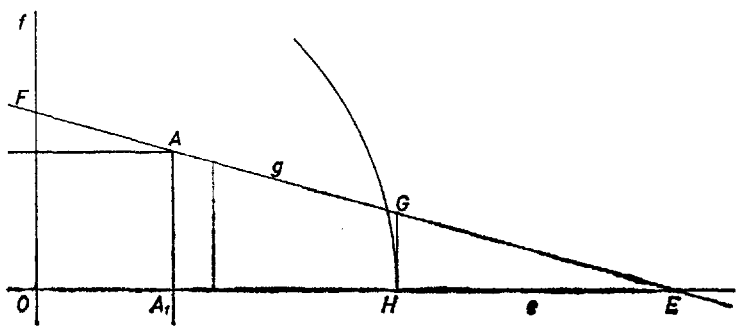


10. ábra

Legyen ugyanis a négyzet egyik csúcsa A, a sokszög A-n átmenő oldalának egyenese (vagy ezek egyike) g, és messe g az e, f egyeneseket E-ben és F-ben. Könnyen látható, hogy (11. ábra)

$$\frac{1}{OE} + \frac{1}{OF} = 2,$$

ezért ha $OF \leq OE$, akkor $OF \leq 1 \leq OE$, tehát $OF \leq d/2$, F a $d/2$ sugarú körön belül van.



11. ábra

Ha $OE \leq d/2$, akkor

$$t \leq 4t_{OEF} \leq 2OE \cdot OF \leq d,$$

tehát $\lambda \leq 1$ (a négyzet oldala, a még mindig egységnyi), ha pedig $OE > d/2$, legyen a $d/2$ sugarú körnek OE-n levő pontja H, a H-ban e-re emelt merőleges messe EF-et G-ben, akkor az OH szakasz felezőpontja $d/2 > 1/2$ miatt már a négyzeten kívül van, tehát az $OFGH$ trapéz középvonala kisebb 1/2-nél, és így

$$t \leq 4t_{OFGH} = 4\frac{OF + GH}{2} \cdot OH \leq 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} = d,$$

tehát ismét azt kapjuk, hogy $\lambda \leq 1$.

Ezzel a *c)* kérdésre már lényegében válaszoltunk, de az *a)* kérdés még mindig megoldatlan. Szóval ha a négyzet oldala 1, és ha $d \geq 2$, akkor általában sem lehet λ 1-nél nagyobb. Mi van, ha $d < 2$? Legyenek a négyszög átlói e és f, az átlók közti szög ω. Ekkor $t = \dfrac{1}{2} ef \sin\omega \leq \dfrac{d^2}{2}$, ami viszont $d < 2$ miatt kisebb, mint d, tehát a fentiek után már ez az eset sem okozott nehézséget.