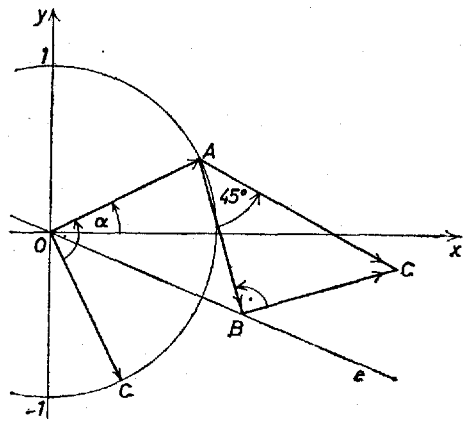
Legyen a megadott egyenes e. A BC rudat a B pontban a feladat feltételeinek megfelelően kétféleképpen csatlakoztathatjuk AB-hez, attól függően, hogy az ABC ***irányított szög*** $+90°$ vagy $-90°$. Mi most azzal az esettel foglalkozunk, amikor az irányított szög $(-90°)$. A másik esetet az e egyenesre való tükrözéssel vezethetjük vissza erre az esetre.

Legyen az OA vektor és az x tengely által alkotott szög α és rögzítsük az A pontot. A B pont általában két különböző helyzetet vehet fel. Számítsuk ki mindkét esetben a C pont koordinátáit!



1. ábra

1. Ha a B és O pont egybeesik, akkor OA-t $(-90°)$-kal elfordítva kapjuk meg OC-t, így C koordinátái

$$C_x = \cos(\alpha - 90°) = \sin\alpha; \tag{1}$$
$$C_y = \sin(\alpha - 90°) = -\cos\alpha.$$

2. Ha B és O nem esik egybe, akkor B helyzete már egyértelmű. Határozzuk meg az $\overrightarrow{AC}$, valamint $\overrightarrow{OX}$ irányított félegyenesek szögét! $\overrightarrow{OB}$-t $+22{,}5°$-kal elfordítva kapjuk meg OA-t, mert az e egyenes az x tengellyel $\operatorname{arctg}\frac{1-\sqrt{2}}{1} = -22{,}5°$ szöget zár be. Az AOB háromszög egyenlő szárú, azért $\overrightarrow{OB}$ irányított félegyenest $-(\alpha + 22{,}5°)$-kal elfordítva kapjuk meg $\overrightarrow{AB}$-t, $\overrightarrow{AB}$-t pedig $+45°$-kal elfordítva kapjuk meg $\overrightarrow{AC}$-t. Így $\overrightarrow{OX}$ -et $(-22{,}5° - \alpha - 22{,}5° + 45°) = -\alpha$ szöggel elfordítva kapjuk meg $\overrightarrow{AC}$-t, azaz az általuk bezárt szög éppen $-\alpha$. Az $\overrightarrow{AC}$ vektor hossza az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszögből $\sqrt{2}$, így az $\overrightarrow{AC}$ vektor

$$\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{2}\cos(-\alpha), \sqrt{2}\sin(-\alpha)\right).$$

Az $\overrightarrow{OA}$ $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ vektorhoz az $\overrightarrow{AC}$ vektort hozzáadva, éppen a C pont koordinátáit kapjuk meg:

$$C_x = \cos\alpha + \sqrt{2}\cos(-\alpha) = \left(\sqrt{2}+1\right)\cos\alpha;$$
$$C_y = \sin\alpha + \sqrt{2}\sin(-\alpha) = \left(\sqrt{2}-1\right)\sin\alpha;$$

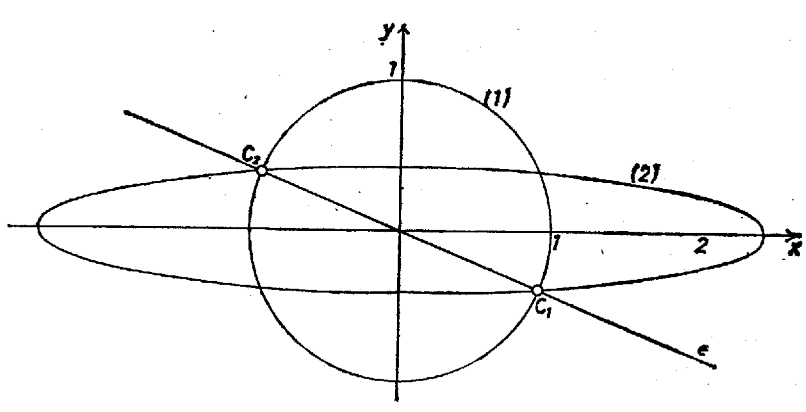
Azt kaptuk tehát, hogy a C pont minden α-ra, az (1) vagy (2) egyenletekkel leírt görbéken található: Az (1) egyenlettel meghatározott görbe éppen az egységsugarú kör. A (2) egyenlet viszont egy ellipszist ad meg:

$$x = \left(\sqrt{2}+1\right)\cos\alpha, \quad y = \left(1-\sqrt{2}\right)\sin\alpha$$

választással a

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2} + \frac{y^2}{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = 1$$

egyenletű ellipszisről van szó.



2. ábra

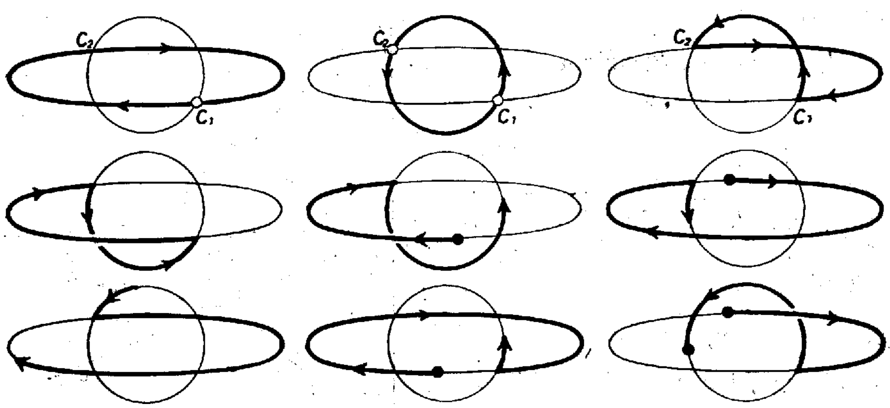
Az A pontnak végig kell futnia az egységkörön. Ez éppen azt jelenti, hogy az α szög valamely értékből kiindulva 360°-os intervallumon fut végig. Az előbb láttuk, hogy eközben a C pont két görbe valamelyikén fut. Azonban a C pont pályája folytonos vonal lesz, így, az egyik görbéről a másikra csak akkor léphet át, ha valamely α-ra (1) és (2) ugyanazt a pontot adja:

$$\sin\alpha = \left(\sqrt{2}+1\right)\cos, \quad \text{valamint} \quad -\cos\alpha = \left(1-\sqrt{2}\right)\sin\alpha.$$

Mindkét egyenlőség akkor teljesül, ha

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}+1, \quad \alpha = 67{,}5^\circ + k\cdot 180^\circ.$$

Az $\alpha = 67{,}5^\circ$-hoz tartozó pontot C_1-gyel, az $\alpha = 67{,}5^\circ + 180^\circ$-hoz tartozó pontot C_2-vel jelöltük meg. Amennyiben a $\alpha\,67{,}5^\circ$-tól $\alpha\,67{,}5^\circ + 180^\circ$-ig változik, úgy az (1) görbén a C pont C_1-től C_2-ig pozitív irányban fut végig; a (2) görbén a C pont C_1-től C_2-ig negatív irányban fut végig. Hasonlóan a másik intervallumra is.



3. ábra

Összefoglalva, ha feltesszük, hogy az A pozitív irányban fut körbe az egységsugarú körön, akkor a C pont pályája a következők valamelyike lehet (3. ábra) (természetesen attól függően, hogy hol van a kezdőpont); összesen 20-féle lehetőség.

Balogh Zoltán (Debrecen, Fazekas M. Gimn., IV. o. t.)