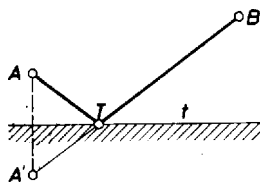


A természet jelenségeinek és képződményeinek törvényszerűségeit vizsgálva sokszor úgy látszik, mintha a természet világa olyan kísérleti műhely volna, amely a lehetséges megoldások közül kikutatja és megvalósítja a legcélszerűbbet. Gondoljunk néhány közismert esetre: Ha  $A$  egyénnek a  $t$  tóparttól egy kancsó vizet kell vinnie  $B$ -hez, akkor  $A$  bizonyára „érzik szerint” az 1. ábrán látható ferde irányban (és nem merőlegesen) indul a part felé.



1. ábra

Felrajzolva az  $A$  ponthoz  $t$  egyenesre szimmetrikus  $A'$  pontot, majd megvonva  $A'B$  egyenest, mely  $t$ -szimmetriatengelyt  $T$  pontban metszi, látjuk, hogy  $A'T = AT$ , és így

$$A'T + TB = AT + TB = A'B$$

szakasz hosszával. A  $T$  pont ilyen választásakor  $A$  tehát valóban a legrövidebb úton éri el  $B$ -t.

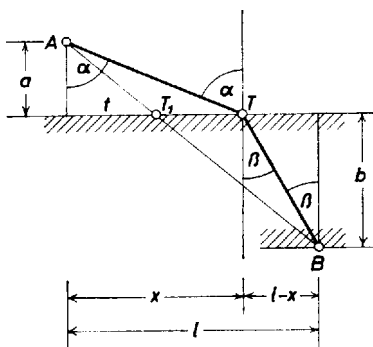
Ismeretes, hogy a fény  $t$  tükörfelületről ugyanilyen úton jut  $A$ -ból  $B$ -be. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben adott sebesség mellett a legrövidebb út egyszersmind a legrövidebb időt is jelenti.

Lássuk most, milyen úton jut el a legrövidebb idő alatt  $A$  a tó túlsó partján levő  $B$ -hez, ha futási sebessége  $c_1$  és úszási sebessége  $c_2$ ? Nyilván arra fog törekedni, hogy a futási sebességét használja ki jobban, mivel  $c_1 > c_2$ .

Ha egyenes irányban akarná elérni  $B$ -t, akkor csak  $AT_1$  úton futhatna és  $T_1B$  hosszú távon már úsznia kellene. Bizonyára a tópartnak olyan  $T$  pontjáról igyekeznek megközelíteni  $B$ -t, hogy a kisebb  $TB$  távolság maradjon úszásra. A matematikai számítás azt eredményezi, hogy akkor ér  $A$  legrövidebb idő alatt  $B$ -hez, ha úgy választja a  $T$  pontot, hogy

$$(1) \quad c_1 : c_2 = \sin \alpha : \sin \beta;$$

ahol  $\alpha$  a futási,  $\beta$  az úszási iránynak a merőlegessel alkotott szöge.



2. ábra

Ugyanis a 2. ábra szerint a futási idő  $t_1 = \sqrt{a^2 + x^2}/c_1$ , az úszási idő  $t_2 = \sqrt{b^2 + (l-x)^2}/c_2$ . Az összes idő

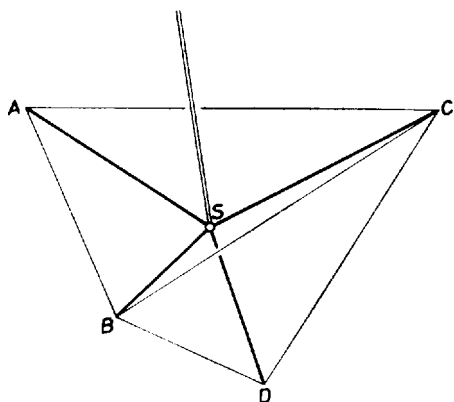
$$y = t_1 + t_2 = \sqrt{a^2 + x^2}/c_1 + \sqrt{b^2 + (l-x)^2}/c_2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{l-x}{c_2 \sqrt{b^2 + (l-x)^2}} = 0,$$

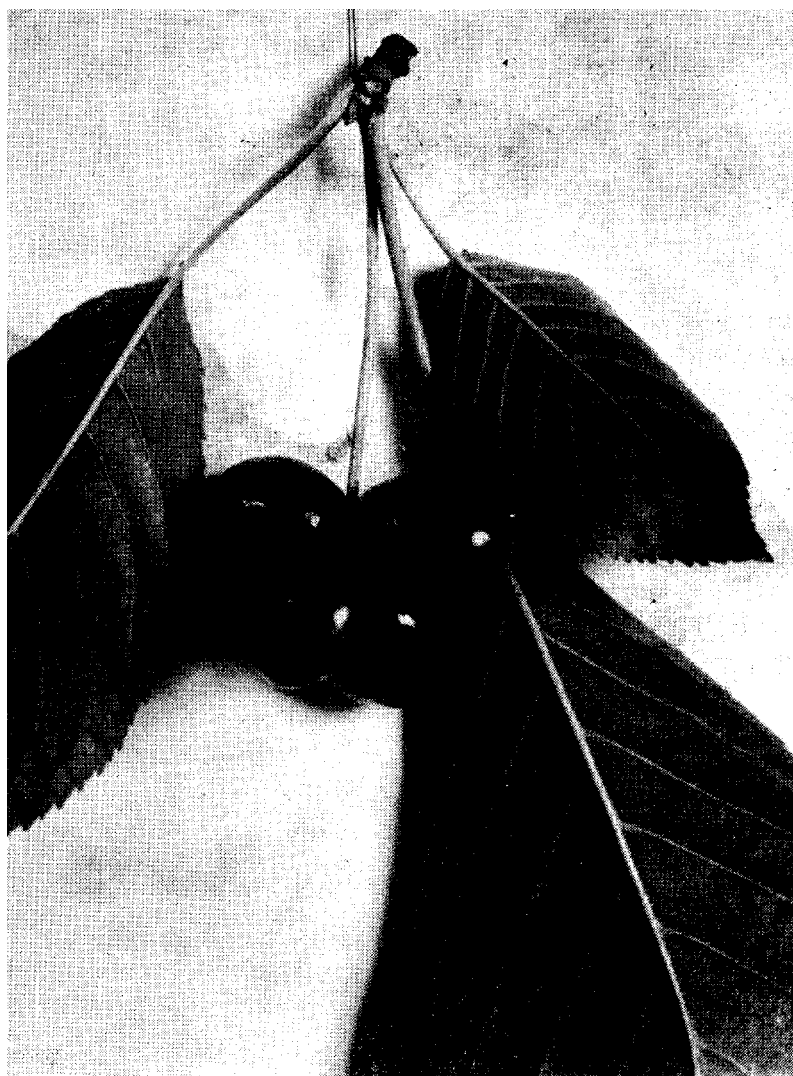
amiből már a fenti arányosság következik.

A fény ugyanezen szabály szerint „választja meg” a  $T$  töréspontot, amikor egy optikailag ritkább közegből belép egy optikailag sűrűbb közegbe, (melyben a sebessége már csökken).

Hasonló gondolatok jutottak eszembe, amikor megpillantottam azt a négyes írek cseresznyeszemet, melyre régi kedves barátom, Borsodi Sándor tőszomszédom hívta fel figyelmemet (3. és 3/a ábra).



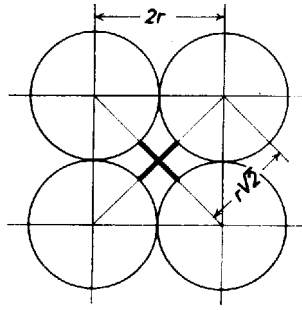
3/a. ábra



3. ábra

Ha a cseresznyeszemeket gömböknek képzeljük, akkor felvetődik az a kérdés, hogy négy gömb sokféle elhelyezkedési lehetősége közül mi jellemző éppen a keletkezett, és bizonyára még nagyon kevés ember által látott ilyen négyes cseresznyeikre.

Tételezzük fel, hogy megvizsgálandó, mikor lesz legkisebb a cseresznyeszár végének a gömbfelszínektől mért távolságösszege.



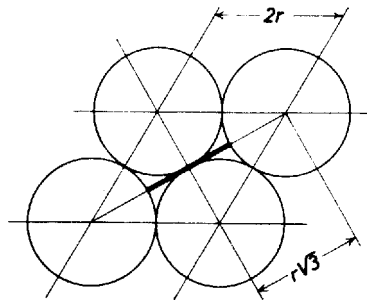
4. ábra

Ha a négy gömb középpontjai egy négyzet csúcspontjaiban helyezkednének el (4. ábra), akkor a középponttól mért távolságok összege

$$4(r\sqrt{2} - r) = 4r(\sqrt{2} - 1) \approx 4 \cdot 0,41r \approx 1,64r$$

lenne.

Lássuk továbbá azt az esetet, amikor a gömbközpontok olyan rombusz csúcspontjaiban helyezkednek el, melyet a rövidebb átlója két egyenlő oldalú háromszögre oszt (5. ábra).



5. ábra

A  $2r$  oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszög magassága

$$(2) \quad h = r\sqrt{3}.$$

Mivel most két gömb érintkezik egymással, a szár végpontjának a másik két gömb felszínétől mért összege

$$2(r\sqrt{3} - r) = 2r(\sqrt{3} - 1) \approx 2 \cdot 0,73r \approx 1,46r.$$

Lássuk most azt a harmadik esetet, mely legjobban megközelíti a valóságban létrejött négyes ikertermést. A négy gömb középpontja egy szabályos tetraéder (6/a ábra) csúcspontjaiban helyezkedik el.

Legyen a tetraéder élének hossza

$$AB = BC = CA = AD = BD = CD.$$

Szabályos háromszögeinek magassága (2) szerint

$$AA_1 = DA_1 = h = r\sqrt{3}.$$

A 6/b ábra szerint  $A_1B_1 \parallel AB$ , tehát

$$ABO_1\Delta \sim A_1B_1O_1\Delta,$$

és így

$$AO_1 : O_1A_1 = AB : A_1B_1 = AC : B_1C = 2 : 1,$$

vagyis

$$AO_1 = 2O_1A_1,$$

tehát

$$AA_1 = AO_1 + O_1A_1 = 3O_1A_1,$$

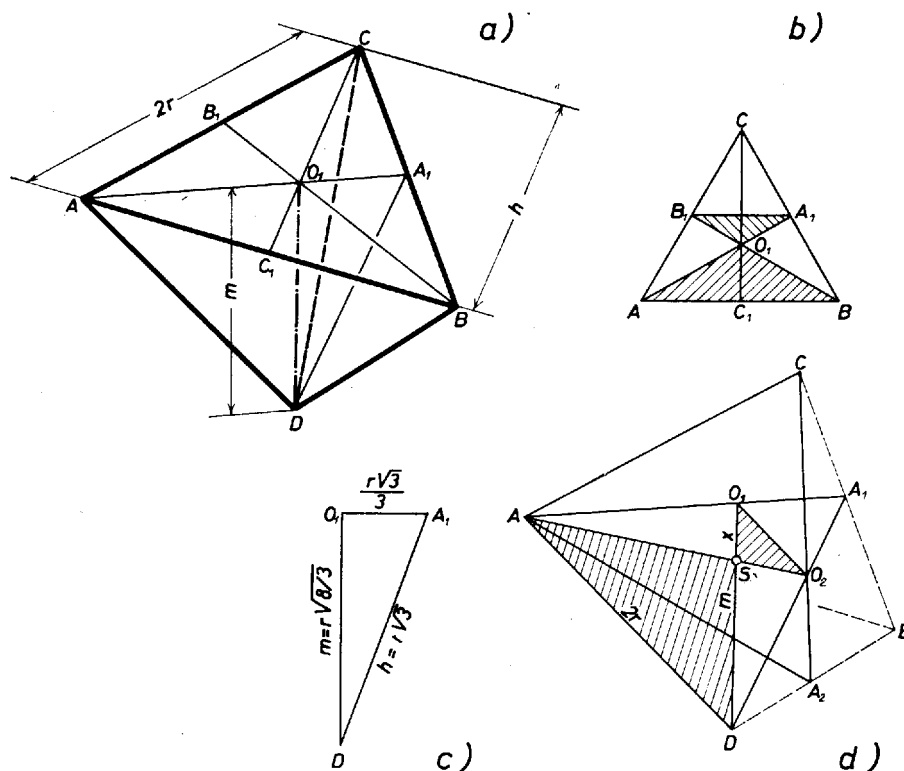
vagyis

$$O_1A_1 = AA_1/3 = r\sqrt{3}/3.$$

A tetraéder  $m$  magasságát az  $O_1A_1D$  derékszögű háromszögből kapjuk meg (6c ábra).

$$m = \sqrt{DA_1^2 - O_1A_1^2} = \sqrt{3r^2 - 1/3r^2},$$

$$(3) \quad m = r\sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1,633r.$$



6. ábra

A tetraéder valamely lapjának oldalfelezői a szemközti negyedik csúcsponttal olyan síkokat határoznak meg, melyek mindegyike tartalmazza a tetraéder  $S$  súlypontját. Ilyen sík  $4 \cdot 3 = 12$  van, de elegendő ezek közül két olyat tekintetbe venni, melyek a tetraéder  $m$  magasságát is tartalmazzák, hogy az  $S$  súlypont helyét meghatározzuk. A 6d ábrán az  $ABC$  háromszög  $AA_1$  szögfelezőjéhez tartozó  $AA_1D$  háromszöget és  $ABD$  háromszög  $AA_2$  szögfelezőjéhez tartozó  $AA_2C$  háromszöget vettük figyelembe. Az ábra jelöléseivel  $A_1O_1 = A_1O_2 = h/3$ , tehát  $O_1O_2 \parallel AD$ , ennél fogva

$$SO_1O_2\Delta \sim SDA\Delta.$$

Az ábra jelöléseivel  $O_1S = x$ , és az  $A_1O_1O_2\Delta \sim A_1AD\Delta$  hasonlóság alapján  $O_1O_2 = 2r/3$ ,

$$O_1S : O_1O_2 = SD : AD,$$

vagyis

$$x : 2r/3 = (m - x) : 2r,$$

ahonnan

$$(4) \quad x = m/4,$$

vagyis a súlypont távolsága az oldallapoktól (4) szerint (3) tekintetbe vételével

$$x \approx 1,633 \cdot r/4 \approx 0,408r,$$

és a súlypont távolsága a csúcsoktól

$$m - x \approx r(1,633 - 0,408) \approx 1,225r.$$

Ha a szár  $S$  pontban végződik, akkor kb.  $(1,225 - 1)r = 0,225r$  távolságra közelíti meg az egyes gömbök felszínét. Ennek a négyszerese  $0,9r$ , tehát a legkisebb a megvizsgált elhelyezkedési lehetőségek között. Kb. 12 mm-es szemátmérőnél ez a távolság 1,2 mm; ezt a távolságot egyrészt a cseresznye gömbtől eltérő alakja, másrészt a szárvég kiszélesedése annyira kiküszöböli, hogy valóságban a táplálékot közvetítő szárnak a vége mind a négy gyümölcszemmellel érintkezik.

A kettős ikerképződmény sokkal gyakoribb, sőt ezeknél a magvak összenövésével is találkozunk. Ilyen ikermandulamagvat tüntet fel a 7. ábra.



7. ábra

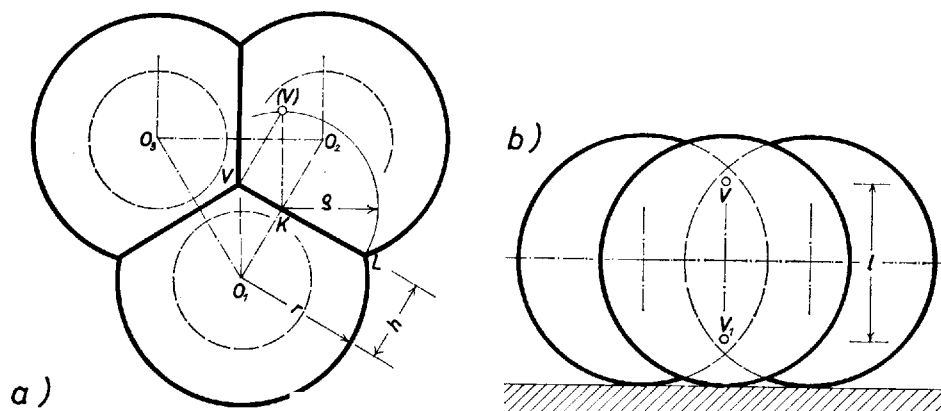
Erről világosan látható, hogy a táplálékot közvetítő szár lehetőleg egyformán érintkezik mind a két ikerszemmel.

A 6. és 7. ábrák alapján már sejtethetjük a hármasszem geometriai formáját. A szemeket újra gömb alakra egyszerűsítve, vizsgáljuk azt az esetet, amikor az ikerszemek csak húsaikkal nőttek össze, de a magvak még különváltak. A 8a ábrán láthatjuk, ennek az a feltétele, hogy a középpontok egymástól való távolsága

$$(5) \quad 2\sqrt{r^2 - \varrho^2} = 2h = O_1O_2$$

nagyobb legyen, mint a mag átmérője.

A 8a ábrán felülnézetben, a 8b ábrán előlnézetben látható a hármasszem.



8. ábra

A gömbök középpontjai az  $O_1O_2O_3$  egyenlő oldalú háromszög csúcspontjai. A keletkezett három  $\varrho$  sugarú áthatási kör síkja egy olyan  $VV_1$  egyenesközt tartalmaz, melynek  $V$  végpontjában végződik az egyetlen szár.

A  $VV_1 = l$  fél hosszát a  $\varrho$  sugarú körben határozhatjuk meg. A 8a ábra jelöléseivel  $O_1L = r$ ;  $KL = \varrho$ ;  $O_1K = h$  és

$$(6) \quad VK = h \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{r^2 - \varrho^2} / \sqrt{3}.$$

A térbeli  $V$  pontnak a gömbközpontok síkjába való beforgatását ( $V$ -vel jelölve, a  $\varrho$  sugarú kör  $KV(V)$  derékszögű háromszögének  $V(V)$  befogója a keresett hossz az (5) és (6) kifejezésének felhasználásával

$$V(V) = l/2 = \sqrt{\varrho^2 - VK^2} = \sqrt{\varrho^2 - (r^2 - \varrho^2)/3} = \sqrt{(4\varrho^2 - r^2)/3}.$$