

Első feladat.

Egy könyvtár ki- és bejáratánál egy-egy tábla áll. Minden be-, illetve kilépőnek fel kell írnia a megfelelő táblára, hogy hány embert talált, illetve hagyott a könyvtárban.

Bizonyítsuk be, hogy egy teljes nap során ugyanazok a számok kerülnek a két táblára, legfeljebb más sorrendben (feltesszük, hogy egyszerre csak egy ember érkezik vagy távozik).

Az egyik versenyző (Hajdu István, Hódmezővásárhely) megoldását igen szemléletes, hangulatos formában fogalmazta meg. Elsőnek ezt közöljük eredeti alakjában.

I. megoldás. Ha valaki bemegy a könyvtárba, akkor ezután két olyan dolog történhetik meg, amely a feladat szempontjából lényeges. Vagy eszébe jut, hogy otthon hagyta az olvasójegyt és távozik, mielőtt egy másik ember bejönne, – ekkor nyilvánvaló, hogy ugyanannyi embert hagy ott, mint amennyit talált, –; vagy ottmarad, és ez esetben újak érkeznek utána, az olvasók száma nő a polcok között.

A második esetet vizsgáljuk meg közelebbről!

Miután könyvtárunk úgyis különleges tulajdonságokkal rendelkezik, olvasói bizonyára elfogadják a következő módosítást, amely a feladat szempontjából közömbös: miután az egyes személyek nincsenek kitüntetve, teljesen mindegy, hogy adott pillanatban ki lép be vagy ki hagyja el a termet, ezért tehát megállapodhatunk abban, hogy mindig az menjen el, aki utoljára bejött. Például: fessünk az egyik béketűrő olvasó hátára egy nagy vörös „A” betűt. „A” bejön, felírja, hogy n db embert talált az olvasóteremben. Ezután leül, közben jönnek-mennek a többiek. Tegyük fel, hogy k db olvasó érkezett még. Egyszer csak „A” feláll és elindul az ajtó felé. Ekkor azonban elébe állunk és megkérjük, hogy maradjon még. Helyette elküldjük azt, aki legutóbb bejött, akinek a száma, $(n + k)$, a belépő tábla legalján van. A feladat szempontjából teljesen közömbös, hogy „A” barátunk egész nap ott rostokol, hiszen egy főt elzavartunk helyette. Tettük ezt pedig oly módon, hogy minden távozó ugyanazt a számot írta fel a távozási táblára, mint a másikra, amikor bejött. Ha egy idő múlva már senki sem jön többé olvasni, akkor kiengedjük a bennszorultakat érkezésük fordított sorrendjében. Így sor kerül szegény „A”-ra is, aki önkényünk áldozata lett, majd többi társára, míg végül senki sem marad benn. Így tehát minden olvasóhoz egy számpárt rendeltünk hozzá egy-egyértelműen. Miután a feladat szempontjából lényeges változtatást nem tettünk, ugyanazt az eredményt kell kapnunk, mint egyébként, vagyis a két táblán ugyanazok a számok szerepelnek (noha más-más sorrendben).

II. megoldás. Módosítsuk az előírást a következőképpen: aki eltávozik, a bejáratnál áthúzza a könyvtárban maradó olvasók számát, ha az szerepel ott áthúzatlanul; ha nem szerepel, akkor felírja a kijáratnál. Nem nehéz belátni, hogy az utóbbira sohasem kerül sor, ha ugyanis k olvasó tartózkodik a könyvtárban, akkor a táblán (áthúzatlanul) a $0, 1, \dots, k - 1$ számok szerepelnek egyszer-egyszer. Speciálisan, ha nincs bent senki, akkor a tábla is üres. Megmutatjuk, hogy ez a helyzet minden létszámváltozásnál érvényben marad.

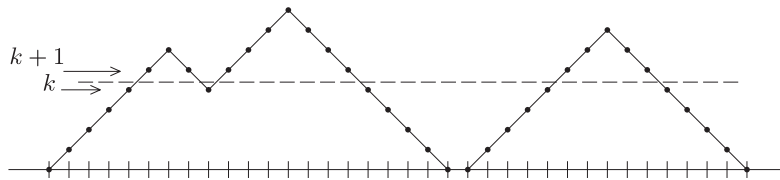
Nyitáskor az utoljára említett helyzet áll fenn.

Ha egy időpontban a leírt helyzet fennáll és valaki érkezik a könyvtárba, akkor a létszám $(k + 1)$ -re nő, és ugyanakkor a táblára a $0, 1, \dots, k - 1$ számok mellé odakerül a k is.

Ha viszont valaki eltávozik, akkor $(k - 1)$ olvasót hagy a teremben és ennek megfelelően áthúzza a $(k - 1)$ -et, tehát a $0, 1, \dots, (k - 2)$ marad a táblán egy-egy példányban.

Záráskor senki sem marad a teremben, ennek megfelelően a bejáratnál is minden szám át lesz húzva. Ez annak felel meg, hogy az eredeti előírás szerint a kijáratnál ugyanazok a számok kerülnek, mint a bejáratra.

Megjegyzések. Sokféleképpen fogalmazták a versenyzők a megoldást, bár az alap gondolat hasonló a fentiekhez. Röviden említünk néhányat.



1. Többen egy embert állítottak egy létra elé, aki minden időben a létra anyyadiak fokán áll, ahányan a könyvtárban vannak. Emberünk egyenként lép feljebb vagy lejjebb. Ahányadik fokról felfelé lép, az a szám kerül a bejáratnál táblára, ahányadikra lefelé lép, az a kijáratra. A feladat állításának helyessége abból következik, hogy minden fokról ugyanannyiszor lépett felfelé, ahányszor lefelé jöve rálépett, mert estére földet ér és hazamegy.

2. Egy koordináta-rendszer x tengelyén egyenlő távolságban sorakozó pontok feleljenek meg az egymás utáni létszámváltozások időpontjának, és ábrázoljuk az y tengely irányában a létszámot. A kapott pontokat összekötő törtvonal és az x tengely egy vagy több zárt sokszöget alkot. Ezt k és $(k + 1)$ magasság közt az x tengellyel párhuzamosan átmetszve, a metsző egyenes ugyanannyiszor lép be a sokszögbe, mint ahányszor kilép belőle, azaz ugyanannyi emelkedő és süllyedő szakaszt metsz át. Az előbbieket alsó végpontja, azaz esetünkben k jelöli a bejáratnál táblára kerülő számot, a süllyedők alsó végpontja a kijáratnál táblára kerülőket. Előbb tett megjegyzésünk szerint a kettő egyenlő.

3. Írjunk le $(+1)$ -et, valahányszor érkezik valaki, és (-1) -et, valahányszor távozik. Ekkor bármelyik számig összeadva számainkat, az illető számnak megfelelő érzézés, ill. távozás után kialakult olvasólétszámot kapjuk. Ez az összeg nem lehet negatív, vagyis a sorozat bármelyik számáig legalább annyi $(+1)$ van, mint (-1) , az egész sorozatban pedig ugyanannyi van mindkettőből. A bejáratni táblára az egyes $(+1)$ -ek előtti számig terjedő összegek kerülnek, a kijáratni táblára pedig a (-1) -ekig terjedő összegek [ezt a (-1) -et is még beleértve]. Most abból következik az állítás helyessége, hogy egy egymást követő $(+1, -1)$ párnak megfelelően ugyanaz a szám kerül a két táblára, ha pedig ezt a párt kihagyjuk a sorozatból, akkor a sorozat leírt szerkezete nem változik meg.

Második feladat.

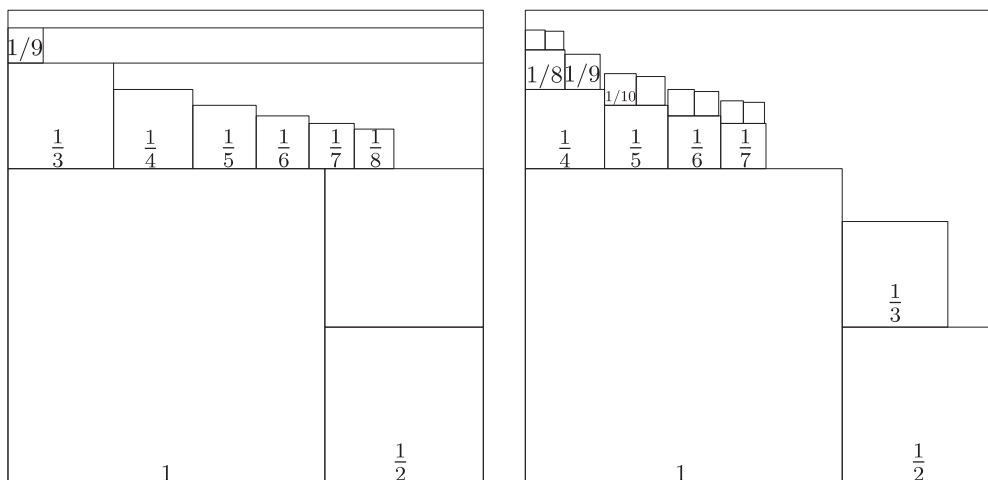
Adott négyzeteknek egy végtelen sorozata, az oldalak hossza rendre $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$. Bizonyítsuk be, hogy van olyan négyzet, amelyben mindezek átfedés nélkül elhelyezhetők, és keressük meg a legkisebb ilyen négyzetet.

Külön tárgyaljuk a feladat két részét: először megmutatjuk, hogy elhelyezhetők négyzeteink egy $1,5$ oldalhosszúságú négyzetben, azután bebizonyítjuk, hogy kisebb oldalú négyzetben már az 1 és a $0,5$ oldalhosszúságú négyzet sem helyezhető el átfedés nélkül.

a) Az összes négyzetek elhelyezése $1,5$ oldalhosszúságú négyzetben:

I. megoldás. Helyezzük egymás mellé az $1/3^k$ oldalú négyzettől az $1/(3^{k+1} - 1)$ oldalúig valamennyit, ahol $k = 0, 1, \dots$. Közülük az első 3^k négyzet oldalának a hossza nem nagyobb $1/3^k$ -nál, a következő 3^k -é pedig $1/(2 \cdot 3^k)$ -nál, így a keletkező sor hossza nem nagyobb, mint

$$3^k \cdot (1/3^k + 1/(2 \cdot 3^k)) = 1,5.$$



Helyezzük a keletkező sorokat egymás fölé. Mindegyikben az első négyzet a legmagasabb, így az összes sorok magassága együtt

$$\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1,5.$$

II. megoldás. Helyezzük az 1 oldalú négyzet mellé az $1/2$ és $1/3$ oldalú, majd fölé az $1/4, 1/5, 1/6$ és $1/7$ oldalú, a továbbiakban pedig mindegyik négyzetre a fele akkora oldalú és a rákövetkezőt.

Az utóbbi kettő nyilván nem nyúlik túl az alattuk levő négyzeten, és

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} < 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

folytán az első négy négyzet sem az 1 oldalú négyzeten.

Az $1/k$ oldalú négyzet ($k = 4, 5, 6, 7$) és a ráhelyezettek felfelé nem nyúlnak magasabbra, mint

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{8k} + \dots = \frac{2}{k} \leq \frac{1}{2},$$

így négyzeteinket elhelyeztük egy $1,5$ oldalú négyzetben.

Megjegyzés. A versenyzők nagy része először a négyzetek területösszegét becsülte meg felülről, sőt néhányan azt is tudták, hogy a területek alkotta végtelen sor összege¹ $\frac{\pi^2}{6}$. Az összeg megbecslése fölösleges már azért is, mert a négyzetek elhelyezése már ad egy ilyen felső becslést, hiszen a befoglaló négyzet területe, $2,25$, felső korlát.

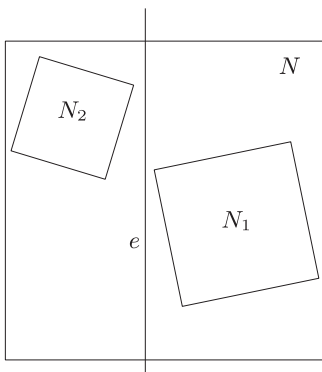
¹Lásd pl. *Skljarszkij-Cscencov-Jaglom*: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I. Aritmetika és algebra. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965. 298–299. old.

A második megoldás érdekessége az, hogy meglepően jó felső korlátot lehet belőle leolvasni. Valóban, a megoldás végén azt nyertük, hogy az $1/k$ oldalú négyzet és a ráhelyezettek benne vannak egy $2/k$, $1/k$ oldalú téglalapban ($k = 4, 5, 6, 7$), így az összes négyzetek együttes területe nem nagyobb, mint

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 2 \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} \right) < 1,663, \quad \text{míg} \quad \frac{\pi^2}{6} = 1,6449 \dots$$

b) Az 1 és a 0,5 oldalú négyzet nem helyezhető el átfedés nélkül 1,5-nél kisebb oldalú négyzetben.

I. megoldás. Helyezkedjék el az 1 oldalú N_1 és az $1/2$ oldalú N_2 négyzet egy N négyzetben úgy, hogy ne legyen közös belső pontjuk. Ekkor van olyan e egyenes, amelynek N_1 és N_2 ellenkező oldalán fekszik. Ha e párhuzamos N valamelyik oldalával, akkor két téglalapra bontja azt, és mindegyiknek az e -re merőleges oldala legalább akkora, mint a sávban fekvő négyzet oldala. Ez esetben tehát N oldala legalább akkora, mint N_1 és N_2 oldalának összege.



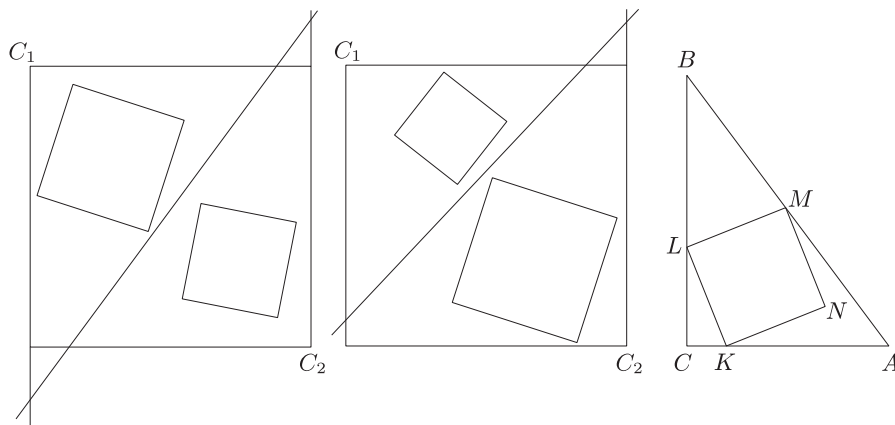
1. ábra

Ha e metszi N mindegyik oldalegyenesét, akkor vegyük mindkét oldalán N -nek a tőle legtávolabbi C_1 , ill. C_2 csúcsát. A C_1 -en, ill. C_2 -n átmenő oldalegyenesek e -vel egy H_1 , ill. H_2 derékszögű háromszöget alkotnak, amelyek N_1 -et, ill. N_2 -t tartalmazza. Állításunk bizonyítására elég azt megmutatni, hogy *egy derékszögű háromszög tartalmazza négyzetek közül az a legnagyobb, amelyiknek két oldala a háromszög befogóin nyugszik, egy csúcsa pedig az átfogón van.*

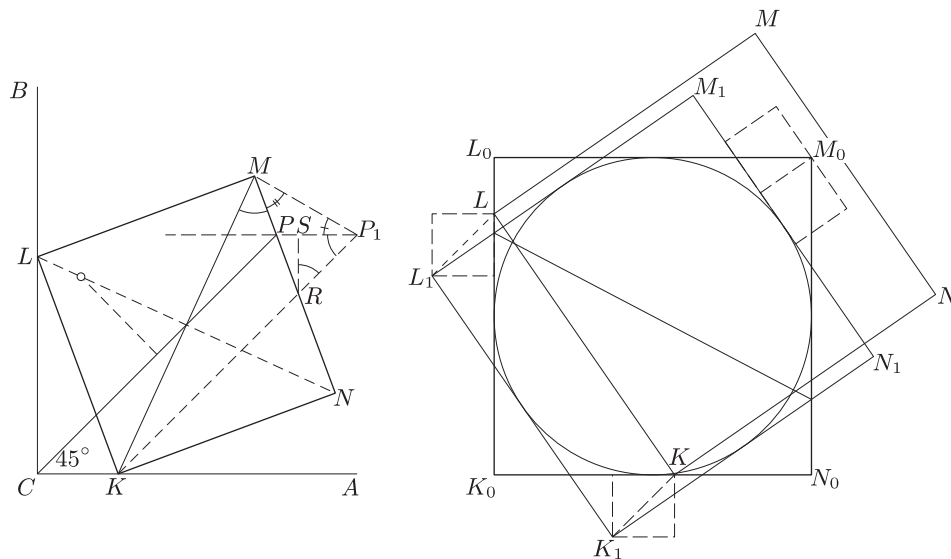
Valóban, ha ez igaz, akkor a H_1 -ben és H_2 -ben elhelyezhető legnagyobb négyzet átlója, N -nek a C_1C_2 átlójára esik, és mivel a négyzetek nem fedhetik át egymást, így átlóik összege N átlóját, oldalhosszaik összege tehát N oldalát adja, vagyis igaz a bizonyítandó állítás is.

A továbbiakban a fent megfogalmazott segédtevélt bizonyítjuk.

Az ABC derékszögű háromszögben levő tetszés szerinti $KLMN$ négyzetet elmozgathatjuk úgy, hogy két csúcsa, mondjuk K és L az AC , ill. BC befogón legyen – ha nem lett volna így eredetileg –, majd C -ből nagyítva, ha kell, elérhetjük, hogy egy csúcs az átfogóra kerüljön. Elég tehát az ilyen helyzetű négyzeteket vizsgálni. Ezek középpontja a háromszög derékszögének szögfelezőjén van. Forgassuk el ugyanis a négyzetet a középpontja körül derékszöggel úgy, hogy az AC -n levő csúcsa a BC -n levőbe menjen át. Ekkor az AC egyenes is átmegy BC -be, így a középpont e két egyenestől egyenlő távolságban van, tehát rajta van a köztük levő szög felezőjén.



2. ábra



3. ábra

Annak a négyzetnek, amelyiknek az egyik csúcsa C -be esik, az ezzel szemközti csúcsa nincs közelebb C -hez, mint a C -ből induló szögfelező MN -nel való P metszéspontja. Elég tehát megmutatnunk, hogy ha K és L különbözik C -től, akkor $CP > KM$.

Toljuk el CP -t párhuzamosan a KP_1 helyzetbe, ekkor a KP_1M háromszög két oldalát kell összehasonlítani. Ezt a velük szemben levő szögek közvetítésével fogjuk megtenni. A KM -mel, ill. KP_1 -gyel szemközti szög PP_1M -gel, ill. PMP_1 -gel nagyobb 45° -nál.

Jelöljük KP_1 és MN metszéspontját R -rel, R vetülete PP_1 -en legyen S . P_1RS háromszög derékszögű és egyenlő szárú, továbbá S a P és P_1 pont közt van, így

$$PRP_1 \sphericalangle > SRP_1 \sphericalangle = PP_1R \sphericalangle,$$

amiből következik, hogy

$$PP_1 > PR.$$

Azt is tudjuk, hogy CP felezi KM -et, így felezi MR -t is, mert KR és CP párhuzamos. Ezért

$$MP = PR < PP_1, \quad \text{tehát} \quad MP_1P \sphericalangle < PMP_1 \sphericalangle.$$

De ekkor egyszersmind

$$MP_1K \sphericalangle = MP_1P \sphericalangle + 45^\circ < PMP_1 \sphericalangle + 45^\circ = KMP_1 \sphericalangle,$$

amiből viszont

$$KM < KP_1 = CP$$

következik, és ezt akartuk bizonyítani.

Megjegyzés. Gyorsabban befejezhetjük a bizonyítást a kerületi szögek tételének felhasználásával: C , K , P és M egy körön van, mert KP 45° -os szögben látszik C -ből is, M -ből is. A kör középpontja a CP és KM húr felező merőlegesének metszéspontja. Mivel az előbbi húr átmegy az utóbbi felezőpontján, a húrok középponttól mért távolságai egy derékszögű háromszög befogója és átfogója. A KM húrtól mért távolság az átfogó, tehát a nagyobbik, így a KM húr a kisebb.

II. megoldás. Azt mutatjuk meg, hogy ha egy $K_0L_0M_0N_0 = \mathbf{N}_0$ négyzetet egy olyan $KLMN = \mathbf{N}$ helyzetbe mozdítunk el a síkban, hogy K és L csúcsa a K_0N_0 , ill. K_0L_0 félegyenesen maradjon, akkor \mathbf{N} tartalmazni fogja az M_0 csúcsot. Ez valóban azt jelenti, hogy ha \mathbf{N} benne van egy derékszögű háromszögben, amelyiknek derékszöge az $L_0K_0N_0 \sphericalangle$, akkor írható a háromszögbe \mathbf{N} -nél nagyobb négyzet, amelyiknek két oldala a befogókon nyugszik.

Forgassuk először el a négyzetet a középpontja körül \mathbf{N}_0 körüljárásával ellentétes irányba hegyes szöggel, a $K_1L_1M_1N_1 = \mathbf{N}_1$ helyzetbe, majd toljuk el a végleges helyére. K_1 és L_1 egyenlő távol van \mathbf{N}_0 megfelelő oldalától a forgatás következtében. Rajzoljunk olyan négyzeteket, amelyeknek egyik csúcsa K_1 , ill. L_1 , másik két csúcsa \mathbf{N}_0 legközelebbi oldalán van és K_1 -ből, ill. L_1 -ből induló átlója K_0M_0 -lal párhuzamos. Ekkor a kérdéses átlók egyenlők lesznek, így megadják a kívánt eltolás vektorát.

Azt kell még belátnunk, hogy az eltolás hossza nagyobb, mint a K_0M_0 szakasz \mathbf{N}_1 -en túlnyúló darabja. Azonban M_0 távolsága M_1N_1 -től ugyanakkora, mint K_1 -é K_0N_0 -tól, mert K_1N_1 és M_0N_0 , továbbá M_1L_1 és K_0L_0 a két négyzet közös beírt körének egymással átellenes érintőpárjai, így metszéspontjaik összekötő egyenesére tükrözve a két négyzetet egymásba mennek át. Rajzoljuk meg azokat a négyzeteket, amelyeknek egyik csúcsa M_0 és két-két csúcsuk M_1N_1 -en

van, ezek egyike tartalmazza a kérdéses szakaszt, az tehát nem nagyobb, mint a négyzet átlója, aminek hossza viszont éppen az eltolás hossza. Ezzel ismét igazoltuk a segédteétel állítását.

Megjegyzés. A bizonyításban nem használtuk ki, hogy a nagy négyzetben tartalmazott két négyzet oldalának hossza 1 és $1/2$ egység, így a b) részben azt bizonyítottuk be, hogy ha egy N négyzetben elhelyezhető egy N_1 és N_2 négyzet úgy, hogy ne legyen közös belső pontjuk, akkor N oldalának hossza legalább akkora, mint N_1 és N_2 oldalhosszának az összege. Ez lényegében megegyezik a P. 208. pontversenyen kívüli problémával², így a fentiekben annak is megoldását adtuk.

Harmadik feladat.

Bizonyítsuk be, hogy minden $k \geq 1$ egész és x valós szám esetén

$$1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^j \frac{x^j}{j!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} \geq 0.$$

I. megoldás. Jelöljük a feladatban szereplő polinomot P_{2k} -val. A feladat állításán kicsit túlmenve azt mutatjuk meg, hogy minden x értékre

$$P_{2k}(x) > 0.$$

Ha x negatív vagy 0, akkor egyik tag sem negatív, a konstans pedig 1, így legalább ennyi a polinom értéke is. Könnyű belátni az állítás helyességét akkor is, ha $x \geq 2k$. Ekkor ugyanis

$$P_{2k}(x) = 1 + \frac{x}{2!}(x-2) + \frac{x^3}{4!}(x-4) + \dots + \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}(x-2k) \geq 1.$$

A $[0, 2k]$ zárt számközben a polinom folytonos függvény, az pedig felveszi a minimumát. Ha valamelyik végpontban veszi fel, akkor ez a minimum is pozitív, tehát minden érték pozitív.

Ha az intervallum belsejében levő valamilyen x_0 helyen veszi fel P_{2k} a minimumát, akkor ez a környezetéhez képest is minimális érték, így itt a deriváltja 0,

$$P'_{2k}(x) = -1 + x_0 - \frac{x_0^2}{2!} + \dots + \frac{x_0^{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} - P_{2k}(x_0) = 0.$$

Ekkor azonban a legkisebb függvényértékre

$$P_{2k}(x_0) = \frac{x_0^{2k}}{(2k)!} > 0,$$

s így a függvény értéke mindenütt pozitív.

Megjegyzések. 1. Beláthatjuk a feladat állításának helyességét a k szerinti teljes indukcióval is. $k = 1$ -re teljes négyzetté kiegészítéssel látható az állítás helyessége. Tegyük most fel, hogy k -nak valamilyen k_0 értékére helyes az állítás, és lássuk be, hogy ez maga után vonja a helyességét $(k_0 + 1)$ -re is. P_{2k_0} a $-P_{2k_0+1}$ polinom deriváltja, így az utóbbi az egész számegegyenesen növekszik. A 0 helyen -1 az értéke, és a föntihez hasonló párosítással – most az első tagtól kezdve – látható, hogy a $(2k_0 + 1)$ helyen pozitív. Mivel a függvény folytonos, így felveszi valamilyen 0 és $(2k_0 + 1)$ közötti x_0 helyen a 0 értéket. De $-P_{2k_0+1}$ a P_{2k_0+2} polinom deriváltja, így az utóbbinak az x_0 helyen minimuma van és a fenti módon látható, hogy ez pozitív.

Ez a megfontolás azt is adta, hogy a P_{2k} polinomnak egy lokális minimuma van, odáig csökken a függvény, onnan növekszik.

2. Indirekt megfontolást is használhatunk. Ha P_{2k} venne fel negatív értéket, akkor ezt csak a $(0, 2k)$ intervallum belsejében vehetné fel. Ekkor minimuma is negatív volna és lokális minimum. Ez azonban nem lehetséges, mert itt

$$P'_{2k}(x) = \frac{x^{2k}}{(2k)!} - P_{2k}(x)$$

pozitív volna és nem 0.

Megoldható a feladat csupán algebrai átalakításokat, és a binomiális együttthatók tulajdonságait felhasználva is.

II. megoldás. Szorozzuk meg $P_{2k}(x)$ -et a

$$P_{2k}(-x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

²Lásd KÖMAL 48. kötet 3. szám 126. oldal.

értékkel. A szorzat j -edfokú tagjának együtthatója, ha $j \leq 2k$,

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \frac{1}{j!} - 1 \cdot \frac{1}{(j-1)!} + \frac{1}{2!} \frac{1}{(j-2)!} + \dots + (-1)^j \frac{1}{j!} \cdot 1 = \\ & = \frac{1}{j!} \left(\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \dots + (-1)^j \binom{j}{j} \right) = 0. \end{aligned}$$

Ha pedig $2k+1 \leq j \leq 4k$, akkor az együttható

$$\begin{aligned} & (-1)^{j-2k} \cdot \frac{1}{(j-2k)!} \cdot \frac{1}{(2k)!} + (-1)^{j-2k+1} \frac{1}{(j-2k+1)!} \cdot \\ & \cdot \frac{1}{(2k-1)!} + \dots + (-1)^{2k} \frac{1}{(2k)!} \cdot \frac{1}{(j-2k)!} = \frac{1}{j!} \left((-1)^{j-2k} \binom{j}{j-2k} + \right. \\ & \left. + (-1)^{j-2k+1} \binom{j}{j-2k+1} + \dots + (-1)^{2k} \binom{j}{2k} \right). \end{aligned}$$

Az összeg két végéről számított ugyanannyiadik tag abszolút értéke mindig megegyezik, így páratlan j esetén továbbra is 0 az együttható. Ha viszont j páros, akkor a j -edik hatványhoz tartozó összes binomiális együttható váltakozó előjellel vett összegéből – aminek az értéke 0 – hiányzik az elejéről a

$$\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \binom{j}{3} + \dots + (-1)^{j-2k-1} \binom{j}{j-2k-1}$$

összeg és a végéről egy ezzel egyenlő összeg. Ez az összeg azonban negatív, mert a tagok abszolút értéke növekszik, miután az alsó számok mind kisebbek, mint $j/2$, az előjelek váltakoznak, a tagok száma pedig páros. A j -edfokú tag együtthatója ennek a negatív összegnek a kétszeresét 0-ra egészíti ki, tehát pozitív.

A polinomok szorzata tehát x páros hatványainak pozitív együtthatós összege, s így minden x értékre pozitív. Ha x nem negatív, akkor a szorzat második tényezője pozitív, negatív x -ekre pedig az első, így mind a két tényező mindig pozitív. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Nem nehéz megmutatni, hogy

$$\binom{j}{0} - \binom{j}{1} + \binom{j}{2} - \dots + (-1)^l \binom{j}{l} = (-1)^l \binom{j-1}{l}.$$

Így

$$P_{2k}(x)P_{2k}(-x) = 1 + \frac{x^{2k+2}}{(2k)!(k+1)} + \frac{x^{2k+4}}{(2k)!3!(k+2)} + \frac{x^{2k+6}}{(2k)!5!(k+3)} + \dots + \frac{x^{4k}}{(2k!)^2}$$