A szóban forgó feladat így szólt:

Adott a térben n sík ($n \geq 5$) úgy, hogy bármelyik háromnak pontosan egy közös pontja van és nincs a térnek olyan pontja, amelyen közülük háromnál több menne át.

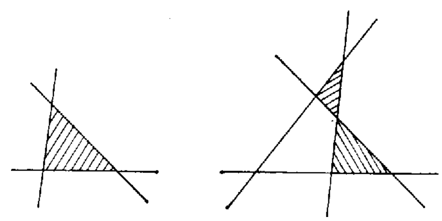
Bizonyítsuk be, hogy azon térrészek között, melyekre a síkok a teret darabolják, legalább $\frac{2n-3}{4}$ tetraéder van.

A megoldásokat ismertető cikkben[1] felvetettük a kérdést, hogy mennyire éles a $\frac{2n-3}{4}$-es korlát; nem helyettesíthető-e jobbal? A válasz igenlő; körülbelül versenyünkkel egy időben R. W. *Shannon* fiatal amerikai matematikus kimutatta, hogy:

1. tétel. *Ha n sík ($n \geq 4$) a feladatban tett kikötéseknek eleget tesz, úgy az általuk létrehozott térrészek között legalább $(n-3)$ tetraéder van.*

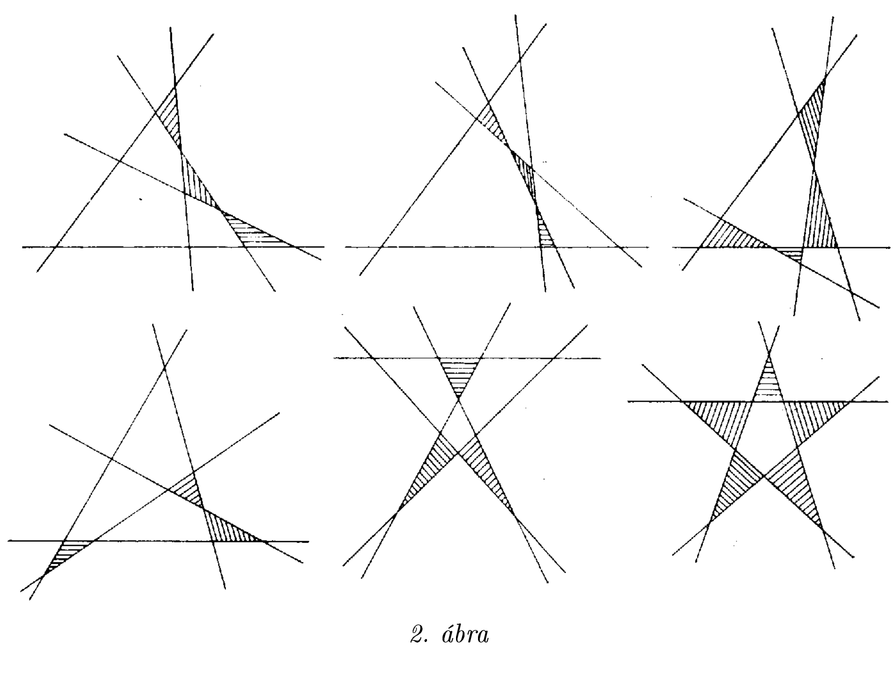
Valójában a fenti állítás története bonyolultabb. Hogy megértsük, tekintsünk először egy egyszerűbb esetet, a síkbeli egyenesek esetét. Legyenek $e_1, e_2, \ldots, e_n$ síkbeli egyenesek ($n \geq 3$), melyek közül nem megy át három egy ponton és melyek között nincsenek párhuzamosak. Hány háromszög van legalább az általuk létrehozott síkrészek között? A versenyfeladat megoldását követve láthatjuk, hogy legalább $\frac{2n-2}{3}$ (hacsak $n \geq 4$); vizsgáljuk meg, állíthatunk-e többet?

Az $n = 3$ és 4 esetekben lényegében[2] csak egyféleképpen helyezhetünk el n egyenest, ezeket az elhelyezéseket az 1. ábra mutatja.



1. ábra

A háromszögek száma 1, ill. 2. Az $n = 5$ esetre már 6 lényegesen különböző elrendezése van az egyeneseknek; mindegyikben legalább 3 háromszöget számolunk (2. ábra).

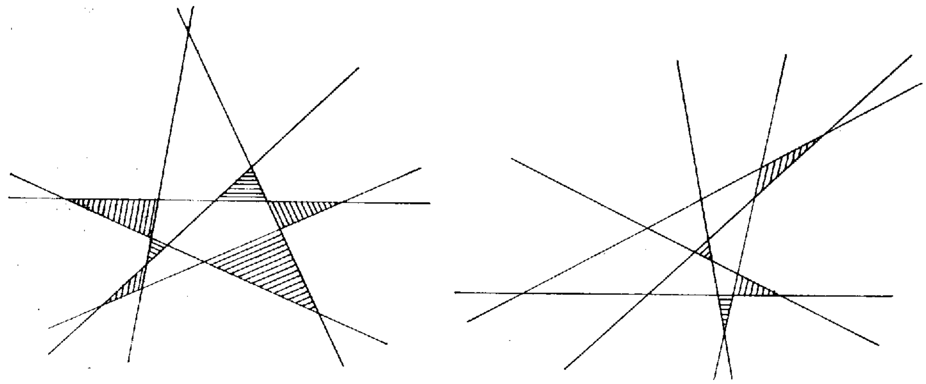


2. ábra

Ha 6 egyenesnek felrajzoljuk néhány elhelyezését, mindig legalább 4 háromszöget találunk (3. ábra).

[1] Surányi János-Lovász László: Az 1973. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása, K. M. L. 48 (1974) 49-55. oldal.

[2] Ezen azt értjük, hogy n (= 3, 4) egyenes két különböző elhelyezése esetén az egyik elhelyezés egyenesei, ill. síkrészei megfeleltethetők (kölcsönösen egyértelműen) a másik elhelyezés egyeneseinek, ill. síkrészeinek úgy, hogy a megfelelő síkrészeket a megfelelő egyenesek határolják.



3. ábra

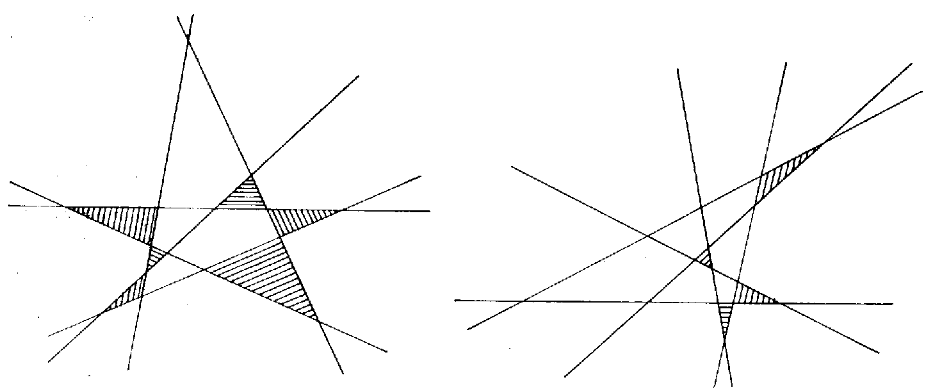
Ezek a számadatok azt sugallják, hogy:

2. tétel. *Ha n egyenes úgy helyezkedik el a síkban, hogy semelyik három nem halad át egy ponton és semelyik kettő sem párhuzamos, akkor azon síkrészek között, melyekre az egyenesek a síkot darabolják, legalább $(n-2)$ háromszög van.*

Ezt az állítást, valamint térbeli megfelelőjét, melyet fent idéztünk, S. *Roberts* fogalmazta meg 1889-ben. Bizonyítása azonban annyira vázlatos volt, hogy azt nem sikerült teljessé tenni; Branko *Grünbaum* néhány évvel ezelőtt megoldatlan problémaként említette ezt. R. W. *Shannon* munkája a síkbeli és térbeli problémára egyaránt választ ad; bizonyítása azonban olyan eszközöket használ, melyeket itt nem ismertethetünk. Így arra fogunk szorítkozni, hogy egy rokon probléma megoldását bemutassuk, (melyhez hasonló lépések, és még sok más, *Shannon* bizonyításában is szerepelnek).

Először is megjegyezzük, hogy van n egyenes a síkban, melyek között nincsenek párhuzamosak és semelyik három nem megy át egy ponton, és melyek pontosan $(n-2)$ háromszöget határoznak meg.

Tekintsük ugyanis egy k kör n különböző érintőjét, melyek egyazon félkörívet érintenek (4. ábra). Ezek az egyenesek nyilván nem párhuzamosak és nem halad át semelyik három egy ponton.



4. ábra

Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy ekkor pontosan $(n-2)$ háromszögtartomány keletkezik.

Módosítsuk most feladatunkat úgy, hogy tekintsük háromszögnek a szögtartományokat is. Hány, ilyen értelemben vett „háromszög" lesz akkor? $n=3,\ 4,\ 5$-re azt találjuk, hogy legalább 4, 5, 6; sejthetjük tehát, hogy

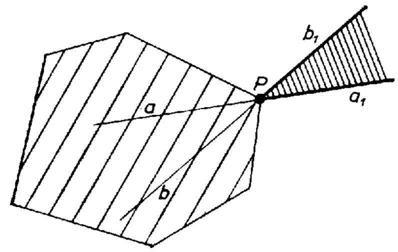
3. tétel. *Ha $n(\geq 3)$ egyenes között nincs két párhuzamos és három egy ponton átmenő, akkor azon síkrészek között, melyekre a síkot osztják,a háromszögek és szögtartományok együttes száma legalább $(n+1)$.*

Hogy viszonylik ez az állítás a 2. tételhez? A 2. tétel szerint van legalább $(n-2)$ háromszög; meg fogjuk mutatni, hogy van legalább 3 szögtartomány. Így a 2. tételből következik a 3. tétel. Itt most megmutatjuk, hogy a 3. tétel közvetlenül is bizonyítható.

4. tétel. *A* 3. *tétel feltételeivel a síkrészek között legalább* 3 *szögtartomány van.*

Bizonyítás. Tekintsük az egyenesek összes metszéspontjainak halmazát és ennek konvex burkát. Ez konvex sokszög, így legalább 3 csúcsa van (hiszen a metszéspontok nem lehetnek mind egy egyenesen). Legyen P egy csúcsa a konvex buroknak és a, b azon két egyenes, melyek P-ben metszik egymást.

Mármost a-nak P által határolt két félegyenese közül az egyiken nincs további metszéspont, különben P nem lehetne csúcsa a konvex buroknak; legyen ez a_1. Ugyanígy, b-nek valamelyik, P által határolt b_1 félegyenesét sem metszi további egyenes. Ekkor az a_1 és b_1 által alkotott konvex szögtartományba a többi $(n-2)$ egyenes nem metsz bele; ez a szögtartomány tehát egyike a tekintett síkrészeknek (5. ábra).



5. ábra

Így a konvex burok minden csúcsához illeszkedik egy olyan síkrész, mely szögtartomány; az ilyen síkrészek száma tehát legalább 3.

Hasonló gondolatmenettel bizonyítható állításunk térbeli megfelelője:

5. tétel. *Ha* $n(\geq 4)$ *sík közül bármely háromnak van közös pontja és semelyik négy nem halad át egy ponton, a síkok által létrehozott térrészek között legalább* 4 *triédertartomány (három szögtartomány által határolt térrész, „térszög") van.*

A 3. tétel bizonyítása előtt egy segédtételt igazolunk:

Segédtétel: Az adott egyenesek mindegyikére legalább három olyan síkrész illeszkedik, mely háromszög vagy sokszögtartomány.

Bizonyítás. Legyenek $e_1, \ldots, e_n$, a tétel feltételeit kielégítő egyenesek az S síkban; megmutatjuk, hogy pl. e_1-re legalább három háromszög, ill. szögtartomány illeszkedik. A bizonyítás alapgondolata az, hogy ha az adott egyeneseket egy másik síkra vetítjük úgy, hogy az e_1 egyenes a „végtelenbe" kerüljön, akkor az e_1-re illeszkedő háromszögek és szögtartományok az új egyenesek alkotta szögtartományoknak fognak megfelelni. Ez utóbbiakról már tudjuk, hogy számuk legalább 3.

Legyen tehát S' olyan sík, mely S-et e_1-gyel párhuzamos e_1' egyenesben metszi; legyen f e_1-gyel párhuzamos egyenes S'-ben. Fektessünk e_1-en át S'-vel és f-en át S-sel párhuzamos síkot; legyen P ezek metszésvonalának egy pontja.

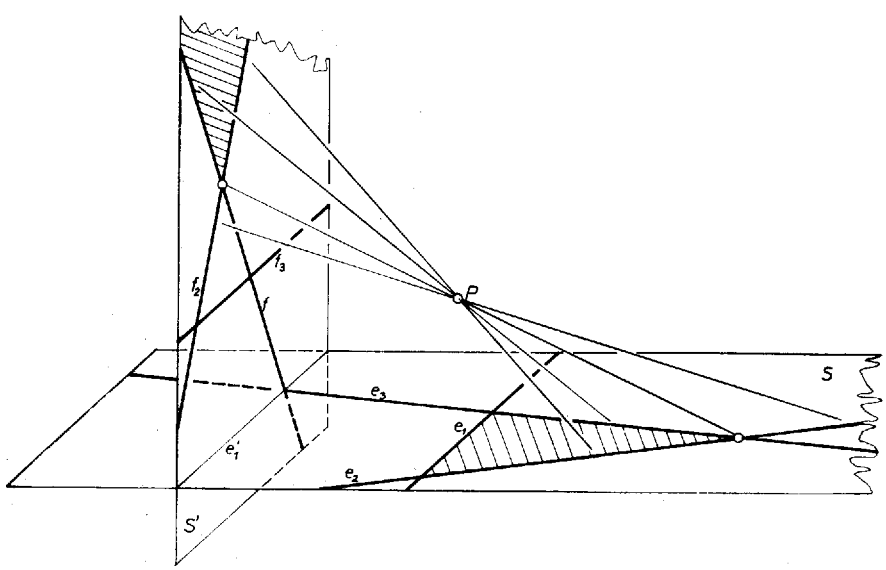
Vetítsük mármost az $e_2, \ldots, e_n$ egyeneseket P-ből S'-re; legyenek $f_2, \ldots, f_n$ a kapott egyenesek. Ekkor megállapíthatjuk, hogy

(a) az f, $f2$, $\ldots$, f_n egyenesek között nincsenek párhuzamosak;

(b) az f, $f_2, \ldots, f_n$ egyenesek közül nem megy át három egy ponton;

(c) ha e_1, e_i, e_j $(1 < i < j \leq n)$ olyan háromszöget alkotnak, melybe további e_k egyenesek nem metszenek bele, akkor f_i, f_j ilyen tulajdonságú szögtartományt határol és viszont;

(d) ha e_1, e_i olyan szögtartományt határol, amelybe másik e_k nem metsz bele, akkor f, f_i ugyanilyen tulajdonságú szögtartományt határol (6. ábra).



6. ábra

Ezen állítások igazolását az olvasóra hagyjuk. A fenti megfigyelésekből láthatjuk, hogy f, $f_2, \ldots, f_n$, legalább 3 szögtartományt hoz létre a 4. tétel szerint. Mivel (c), (d) szerint ezen szögtartományok mindegyikének megfelel az S síkon egy e_1-re illeszkedő háromszög vagy szögtartomány, és ily módon az utóbbinak száma legalább három. Ezzel a segédtételt igazoltuk.

A 3. tétel mármost egyszerű számolással adódik. Az n egyenes mindegyikére illeszkedik, a segédtétel alapján, legalább 3 háromszög vagy szögtartomány; így legalább $3n$ háromszöget és szögtartományt számolunk. Persze, minden ilyen síkrészt többször is számoltunk; a háromszögeket mindhárom oldalegyenesüknél, tehát 3-szor; a szögtartományokat két határoló egyenesüknél, tehát 2-szer. Számoljuk ezért hozzá még egyszer a szögtartományokat; így már $(3n+3)$ szögtartományt és háromszöget számolunk legalább. A $(3n+3)$-at még 3-mal osztani kell, hogy a háromszögek és szögtartományok számára alsó korlátot kapjunk. Tehát ez a szám legalább $\frac{3n+3}{3} = n+1$. Ezzel a 3. tételt bebizonyítottuk.

Végül, hogy valamelyest érzékeltessük R. W. *Shannon* bizonyításának menetét, tekintsünk 6 egyenest a síkban. *Shannon* ekkor konstruált 6 síkot a térben úgy, hogy az egyenesek által alkotott háromszögek a síkok által alkotott triédertartományoknak feleljenek meg. Így az 5. tételből nyeri a 2. tétel állítását 6 egyenesre.

A konstrukció leírása és n egyenesre való általánosítása azonban az ún. többdimenziós geometria eszközeit igényli, és így nem fér bele e cikk kereteibe. Az 1. és 2. tételre elemi (vagyis a sík-, ill. térgeometria körében elvégezhető) bizonyítás nem ismeretes, ami a tételek egyszerű alakját tekintve igen meglepő. Ilyen bizonyítást találni igen érdekes volna.