Megismerkedtünk azzal a ténnyel, hogy egy test tömege, vagyis tehetetlenségének mértéke függ a sebességtől: $m = km_0$, ahol $k = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ és m_0 neve nyugalmi tömeg. (K. M. L. 1974/3–4.)* Az összes impulzus állandóságának a törvénye bármekkora sebesség mellett is érvényes, természetesen az impulzus az $m = km_0$ tömeg és a v sebesség szorzata:

$$I = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Ennek az impulzusnak időegységre jutó változása, $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ adja az erőt. Ez azt jelenti, hogy ha $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$-re adódott egy bizonyos számérték, akkor ezzel arányos a testet gyorsító rugó megnyúlása.

Ezzel összefoglaltuk a mozgástan alaptörvényeinek azon formáit, amelyek tetszőleges sebesség mellett is érvényesek. Nem volt még szó az energiáról, pedig nyilvánvaló, hogy az előző cikkekből megismert tér-idő szerkezet és sebességfüggő tömeg itt is a klasszikus fizikától eltérő körülményeket hoz magával.

Az iskolai tanulmányok elején úgy szokás eljutni a mechanikai energiamegmaradás törvényéhez, hogy kiszámítjuk az erő és út szorzatát, amelyet munkavégzésnek nevezünk, azután felismerjük, hogy W munka elvégzését a vele azonosan egyenlő $mv^2/2$ megjelenése kíséri, amely mennyiséget mozgási energiának szokás nevezni. Erre az eredményre most egy kissé szokatlan számolással jutunk el.

A teljesítmény az erő és sebesség szorzata:

$$P = Fv.$$

A munkavégzés kis $\mathrm{d}W$ részét megkapjuk, ha a teljesítményt megszorozzuk az idővel:

$$\mathrm{d}W = P \cdot \mathrm{d}t = Fv \cdot \mathrm{d}t$$

Az erő az impulzus időegység alatti megváltozása:

$$F = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) = m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma.$$

Ugyanis $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$ a gyorsulás. Így a munkavégzésnek egy kis része: $\mathrm{d}W = mav \cdot \mathrm{d}t$. Differenciálással meggyőződhetünk arról, hogy a jobb oldal az $mv^2/2$ mennyiség megváltozásával egyenlő:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{2mv}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mva, \qquad \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mva \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}W.$$

Tehát, ha egy testen $\mathrm{d}W$ munkát végzünk, akkor ugyanennyivel lesz több az $mv^2/2$ értéke, amelyet mozgási energiának neveztünk.

Ugyanezt a számítást most a relativitáselmélet mechanikai alaptörvényeivel végezzük el. A tömeg most nem állandó. A teljesítmény és munkavégzés definíciói megmaradnak, ezért a számítást ezzel kezdhetjük:

$$\mathrm{d}W = Fv \cdot \mathrm{d}t.$$

Az erő az impulzus időegységre jutó változása; a szorzat és összetett függvény differenciálási szabályait felhasználva:

$$F = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + m_0 v \cdot \left[1-(v/c)^2\right]^{-3/2} \cdot \frac{+2v}{2c^2} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} =$$

$$= m_0 \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + \frac{(v/c)^2}{\left[1-(v/c)^2\right]^{3/2}}\right\} = m_0 a \cdot \frac{1-(v/c)^2+(v/c)^2}{\left[1-(v/c)^2\right]^{3/2}} = m_0 a \cdot \frac{1}{\left[1-(v/c)^2\right]^{3/2}}.$$

Differenciálással meggyőződhetünk a következő állítás helyességéről:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{m_0 c^2\left[1-(v/c)^2\right]^{-1/2}\right\} = \frac{+2}{2} \cdot m_0 c^2\left[1-(v/c)^2\right]^{-3/2} \cdot \frac{v}{c^2} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m_0 a v \cdot \frac{1}{\left[1-(v/c)^2\right]^{3/2}}.$$

A fentiek szerint a sebességgel megszorzott erőt kaptuk meg, vagyis a teljesítményt:

$$P = Fv = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right),$$

és a kis időtartammal megszorzott teljesítmény a test gyorsítására fordított munkát adja:

$$\mathrm{d}W = Fv \cdot \mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right).$$

*Az idézett cikkben közölt megfontolásokból az is látszik, hogy a relativisztikus tömeg képlete a Rellab mozgásának irányában lezajló jelenségek vizsgálatánál érvényes.

Tehát a testen végzett munka egyenlő a zárójelben levő mennyiség növekedésével. Einstein feltételezte, hogy a nulla nyugalmi tömegű nyugvó test energiája nulla, így a fenti képletből azt kapjuk, hogy a v sebességű, m_0 nyugalmi tömegű test teljes energiája:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = m_0 c^2 k.$$

Ebből az alapvető összefüggésből sok minden következik. Ha a test sebessége $v = 0$, akkor energiája $E_0 = m_0 c^2$. Ha a testet gyorsítjuk, az energiája több lesz, és ez a többlet az, amit mozgási energiának nevezünk:

$$E_{\mathrm{kin}} = E - E_0 = m_0 c^2 k - m_0 c^2 = m_0 c^2 (k-1).$$

Ha a sebesség kicsiny a fénysebességhez képest, akkor az E_{kin} közel egyenlő $m_0 v^2/2$-vel, de nagyobb sebességek mellett már nem. Ha egy nyugvó m_0 nyugalmi tömegű testet v sebességre gyorsítunk,

$$E = m_0 c^2 (k-1)$$

energiát adtunk neki. De a most már v sebességgel mozgó test tömege is nagyobb lett, a tömegnövekedés:

$$\Delta m = m_0 (k-1).$$

Rögtön látjuk, hogy a tömeggyarapodás és energiagyarapodás egyenesen arányosak, az arányossági szorzó c^2,

$$\Delta E = c^2 \cdot \Delta m.$$

Az energia és tömeg együtt gyarapodtak. Einstein feltételezte az energiamegmaradás törvényének az érvényességét. Ebből következik, hogy nemcsak a testbe táplált mozgási energia, hanem mindenféle felvett energia gyarapítja a tömeget. A tapasztalat mindezt pontosan igazolta. A sok elmélet után néhány példával kell megismerkednünk.

1. Az asztalon, egy mérlegen áll 0,5 kg tömegű elektromos telep és izzólámpája 10 watt fényenergiát sugároz. Ez azt jelenti, hogy másodpercenként 10 joule energia távozik és ezzel együtt $\Delta m = \Delta E/c^2 = 10$ joule$/(3 \cdot 10^8\ \mathrm{ms}^{-1})^2 = 1{,}11 \cdot 10^{16}$ kg-mal kevesebbet mutat a mérleg, másodpercről másodpercre. A tömeg és energia a fotonokkal távozik; ha a fény hullámhossza átlagosan $\lambda = 0{,}5\ \mu m$, akkor a rezgésszám $n = c/\lambda = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{ms}^{-1}/0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m} = 6 \cdot 10^{14}\mathrm{s}^{-1}$*. Az egyes fotonok energiája $hn = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ joule $\cdot$ s $\cdot\, 6 \cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1} = 3{,}972 \cdot 10^{-19}$ joule. De a fotonoknak tömegük is van: $hn/c^2 = 3{,}972 \cdot 10^{-19}$ joule$/(3 \cdot 10^8\ \mathrm{ms}^{-1})^2 = 4{,}41 \cdot 10^{-36}$ kg. Másodpercenként kb. 25 trillió foton visz el 10 joule energiát és $1,11 \cdot 10^{-16}$ kg tömeget. Az egész tömeghez képest ez a csökkenés nagyon kicsi, kísérletileg ki sem mutatható.

2. Egy elektron és egy pozitron megfelelő körülmények között találkoznak. Mindegyikük tömege $9 \cdot 10^{-31}$ kg, ami összesen $18 \cdot 10^{-31}$ kg. A nyugalomban levő részecskék energiája egyenként $m_0 c^2 = 8{,}1 \cdot 10^{-14}$ joule. Az elektron és pozitron ütközésükkor képesek fotonokká alakulni. (Egyetlen foton nem keletkezhet, mert akkor nem lehet egyidejűleg kielégíteni az energia és az impulzus megmaradásának törvényét.) A keletkezett fotonok össztömege $18 \cdot 10^{-31}$ kg, összenergiája $1{,}6 \cdot 10^{-13}$ joule. Vagyis gamma-sugárzás keletkezik, a részecskék egész tömegéből fotontömeg, a bennük rejlő összes energiából a fotonok energiája lett.

3. Egy gyorsítóberendezésben protonokat gyorsítanak azáltal, hogy részletekben 10^{10} volt potenciálkülönbségen kergetik őket keresztül. Ekkor mindegyik proton 10 GeV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ coulomb $\cdot\, 10^{10}$ volt $= 1{,}6 \cdot 10^{-9}$ joule energiát kap. Nyugalomban a proton tömege $1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg. A proton tömegnövekedése, $\Delta m = m_0(k-1)$ egyenlő $\Delta E/c^2$-tel:

$$1{,}6 \cdot 10^{-27}(k-1) = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-9}}{(3 \cdot 10^8)^2}.$$

Innen $k = 12{,}11$, vagyis ennyiszeresre növekedett a proton tömege. A tömegnövekedés $(12{,}11 - 1) \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-27}$ kg $=$ $1{,}78\ \cdot 10^{-28}$ kg. Közben a gyorsítóberendezés (feltételezve, hogy az az energiaforrást is tartalmazza) ennyivel lett könnyebb. A proton sebességét k-ból kapjuk:

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 12,11.$$

innen $v = 0{,}9966c$.

Ha a protont még egyszer átfuttatjuk 10^{10} V gyorsító feszültségen, tömege 23,11-szer lesz nagyobb a nyugalmi tömegnél, miközben a sebessége a $0{,}9966c$-ről $0{,}9991c$-re növekszik. Látható, hogy ilyenkor az energiafelvétel szinte teljesen a tömeget hizlalja, a sebességet alig növeli az elérhetetlen c felé haladva.

---

*A foton $m_0 = 0$ nyugalmi tömegű részecske, amelynek sebessége mindig a vákuumbeli fénysebesség. Energiája hn, impulzusa hn/c, ahol n a foton rezgésszáma.

Ugyanide tartozó példa a héliumképződés hidrogénből, ami a csillagok belsejében az energiaforrás, vagy az atomerőműben az urán hasadásakor felszabaduló energia. Látható, hogy az elmélet nagyon is gyakorlati tények magyarázatát adja.

Tehát a természeti jelenségek folyamán az energia és a tömeg együtt jönnek, együtt mennek. Tulajdonképp az anyag kétféle megnyilvánulásáról van szó, amelyek egymással egyenes arányban álló mennyiségekben jelentkeznek. A kg és joule közül elég volna az egyik egység is, mint például újabb előírások száműzik a hőtanból a kalóriát, mert elegendő a joule. Be kell látnunk, hogy mennyire hibás az, ha valaki azt mondja: az anyagból lesz az energia vagy fordítva.

És befejezésül még valamit a tudomány módszeréről. A tudományos megfigyelő eszközök fejlődésével együtt jár, hogy olyan jelenségeket fedeznek fel, amelyek az addigi ismereteknek ellentmondanak. Ilyen volt például annak a felfedezése, hogy a fény terjedési sebessége minden inerciarendszerben iránytól függetlenül állandó, vagy a nagy energiájú ütközéseknél tapasztalt jelenségek. Ilyenkor a természettudós új feltevésekkel próbálkozik: az út és idő fogalmát meg kell változtatnia, a tömeg függ a sebességtől stb. Sokféle próbálkozás lehetséges és ezek keresése közben nem egyszer jó útra vezetett a matematikai formulák szépségébe, logikus szerkezetébe vetett bizalom. De igaznak elfogadni végül is csak azt lehet, amit a tapasztalat igazol.