Az 1974. évi középiskolai tanulmányi verseny feladatai

Az I. forduló feladatai

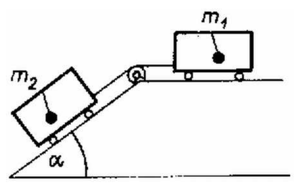
1. *A Föld körül keringő űrhajóban hogyan tudná valamely test tömegét (tehetetlenségének mértékét) meghatározni? A meghajtórakéták már nem működnek, a levegő ellenállása elhanyagolható. Adjunk meg minél többféle eljárást: ismertessük a szükséges összefüggéseket és eszközöket! Ezek közül melyeket kellett előzőleg hitelesíteni?*

(Párkányi László)

Megoldás. A lehetséges eljárások közül kézenfekvő vagy az erőtörvény, vagy az impulzusmegmaradás törvényének alkalmazása. Az $F = ma$ erőtörvény alkalmazásra kerülhet például mint gyorsulásmérés, mint a centripetális erő mérése vagy mint rugó rezgés idejének mérése stb. Mindegyik esetben szükség van hitelesített méterrúdra, órára és erőmérőre. Amennyiben hitelesített tömegetalont használunk, kevesebb hitelesített mérőeszközzel is beérhetjük. Az impulzustörvényt alkalmazhatjuk úgy, hogy egy rugó dob szét két tömeget, vagy mint ütközést. Hitélesített tömegetalonon kívül távolságarányt megállapító hosszmérő eszközre is szükségünk van.

2. *Az* $m_1 = 8$ kg-*os és* $m_2 = 17$ kg-*os kocsik csigán átvetett fonállal összekapcsolva mozognak (1. ábra). Az* m_2 *tömegű kocsi* $\alpha = 36°52'$*-es lejtőn van. A súrlódás elhanyagolható. Hogyan helyezkedik el mozgás közben az* m_1 *és az* m_2 *tömegű kacsiban lógó inga?*

(Vermes Miklós)



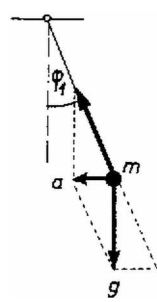
1. ábra

Megoldás. Először a kocsik közös gyorsulását kell kiszámítanunk az erőtörvény alapján:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{m_2 g \sin \alpha}{m_1 + m_2}.$$

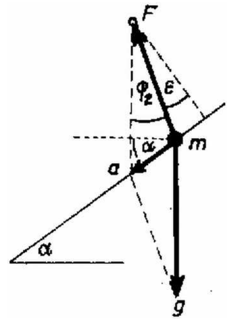
Az inga fonalában ható feszítőerő és az inga tömegére ható súlyerő eredője adja az inga tömegét gyorsító ma erőt. Az m_1 tömegű kocsiban lógó inga esetében (2. ábra):

$$\text{tg}\ \varphi_1 = \frac{a}{g} = \frac{m_2 \sin \alpha}{m_1 + m_2}.$$



2. ábra

Az m_2 tömegű kacsiban lógó inga esetében írjuk fel az erők összetevőit (3. ábra). F a fonálban ható erőt jelenti.



3. ábra

Vízszintesen: $\quad ma \cos \alpha = F \sin \varphi_2,$
Függőlegesen: $\quad ma \sin \alpha = mg - F \cos \varphi_2.$

F kiküszöbölésével φ_2-re kapjuk:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{a \cos \alpha}{g - a \sin \alpha},$$

azután a kiszámított értékét felhasználva:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{m_2 \sin \alpha \cos \alpha}{m_1 + m_2 \cos^2 \alpha}.$$

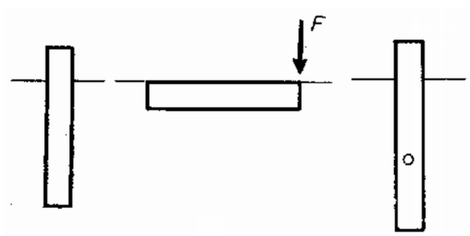
Ha a kocsi merőlegesével alkotott ε szöget nézzük, akkor $\varepsilon = \alpha - \varphi_2$, ezért:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{m_1 \operatorname{tg} \alpha}{m_1 + m_2}.$$

A mi számadatainkkal $a = 51g/125 = 4\ \mathrm{m/s^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = 51/125 = 0{,}408$, $\varphi_1 = 22^\circ\ 12'$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = 51/118 = 0{,}4322$, $\varphi_2 = 23^\circ\ 22'$, $\operatorname{tg} \varepsilon = 6/25 = 0{,}24$, $\varepsilon = 13^\circ\ 30'$.

3. *Az* 1 dm^2 *alapterületű, 4 méter hosszú, fából készült négyzetes oszlop függőlegesen úszik egy tóban, mert súlypontja nincs a közepén (4. ábra). Ahhoz, hogy az oszlop vízszintes helyzetben éppen elmerülve ússzék, a rúd végét* $F = 8$ kp *erővel kell függőlegesen lefelé nyomni. Hol van az oszlop súlypontja? Mennyi munka árán hoztuk az oszlopot ebbe a helyzetbe?*

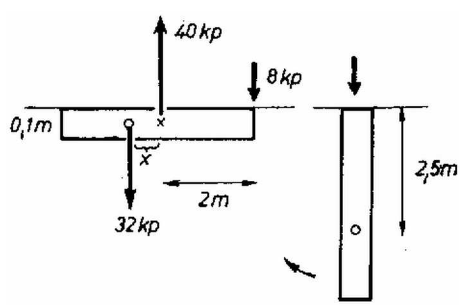
(Wiedemann László)



4. ábra

Megoldás. Az oszlop térfogata 40 dm^3; miivel 8 kp hatására merül éppen be, és a felhajtóerő 40 kp, azért saját súlya 32 kp. Függőleges helyzetben 8 dm áll ki a vízből, hiszen ekkor lesz a felhajtóerő 32 kp.

Jelölje x a súlypont távolságát a középtől (5. ábra).



5. ábra

A vízszintes helyzetben az emelőtörvény szerint $32x = 8 \cdot 20$, tehát $x = 5$ dm. A súlypont a gerenda alsó végétől 15 dm-re, felső végétől 25 dm-re van.

A munka kiszámítása két lépésben történhet. Először függőleges helyzetében nyomjuk le az oszlopot. A megtett út 0,8 m. Közben az erő lineárisan növekszik 0-tól 8 kp-ig, tehát átlagosan 4 kp erővel kell számolnunk. Így a munkavégzésnek ez a része $4 \cdot 0{,}8$ mkp $= 3{,}2$ kp. Ezután emeljük fel az oszlopot a vízszintes helyzetbe. Az oszlop súlypontjának emelkedése 2,5 m $-$ 0,05 m $=$ 2,45 m, a súly 32 kp, tehát $32 \cdot 2{,}45$ mkp $= 78{,}4$ mkp munkát kell végeznünk. Azonban 40 kp súlyú víz 2 m $-$ 0,05 m $=$ 1,95 m mélységbe kerül le, ami $40 \cdot 1{,}95$ mkp $= 78$ mkp munkát ad. Tehát a második lépésben a munkavégzésünk 78,4 mkp $-$ 78 mkp $=$ 0,4 mkp.

Az egész munkavégzés 3,2 mkp $+$ 0,4 mkp $=$ 3,6 mkp.

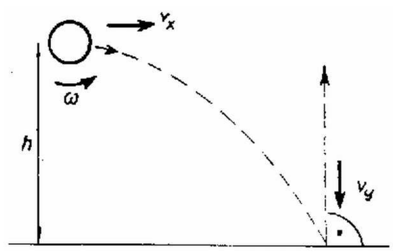
Megjegyzések. 1. A vízszintesen fekvő gerenda egyensúlyi helyzete labilis: a legkisebb zavar következtében lemegy a függőleges helyzetbe, miközben 8 kp erővel felső végét változatlanul a víz színén tartjuk.

2. Ha egy gerendát a végére kifejtett erővel vízszintes úszási helyzetbe kényszerítünk, akkor egyáltalán nem biztos, hogy teteje a víz felszínével egy szinten van. A mi gerendánk azonban megfelel ennek a speciális feltételnek.

A II. forduló feladatai

1. *Az $m = 3$ gramm tömegű pingponglabdát az asztal felett $h = 20$ cm magasságban úgy ütöttük vissza, hogy kezdősebessége vízszintes lett. A labdát „megcsavartuk", ezért a kezdősebességére merőleges vízszintes tengely kőrül forgásba is jött. Az asztalba való ütközése után, onnan már forgás nélkül, pontosan függőleges irányban pattant vissza (6. ábra). Legfeljebb mekkora hőmennyiség keletkezhet az asztalba ütközés folyamán, ha az ütközés rugalmas, de a felület érdessége folytán a labda és az asztal között $\mu = 0{,}25$ a csúszási súrlódási együttható? $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.*

(Bodó Zalán)



6. ábra

Megoldás. Ha az indulási, vízszintes sebesség v_x, és a szögsebesség ω, akkor a mechanikai energiaveszteség:

$$E = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{\Theta\omega^2}{2},$$

mert megszűnt a vízszintes irányú haladó mozgás és a forgás. (Θ a labda tehetetlenségi nyomatéka.) Az asztalba ütközés függőleges sebességösszetevője az esés végsebességéből ismeretes:

$$v_y = \sqrt{2gh}.$$

A kezdeti v_x sebességet és ω szögsebességet abból számíthatjuk ki, hogy mindkettőnek nullára, kell lefékeződnie. A Δt ideig tartó függőleges összenyomódás alatt működő függőleges erő az impulzusváltozásból:

(1) $$F = \frac{2mv_y}{\Delta t}.$$

A kerület mentén fékező súrlódási erő:

(2) $$F_s = \mu F = \frac{2\mu m v_y}{\Delta t}.$$

Ha a haladó mozgás lefékeződése $\Delta\tau$ ideig tart, akkor a vízszintes irányú impulzusváltozás:

$$mv_x = \mu F \Delta\tau = \frac{2\mu m v_y}{\Delta t} \cdot \Delta\tau.$$

Ha $\Delta t = \Delta\tau$, akkor $mv_x = 2\mu m v_y$ és az indulási vízszintes sebesség nagysága:

(3) $$v_x = 2\mu v_y.$$

A forgás ugyancsak $\Delta\tau$ idő alatt fékeződött le ω-ról 0-ra, tehát a szöggyorsulás $\beta = \frac{\omega}{\Delta\tau}$. A forgás alaptörvénye szerint a forgatónyomatékot a tehetetlenségi nyomaték és a szöggyorsulás szorzata adja meg:

$$F_s r = \Theta \cdot \frac{\omega}{\Delta\tau},$$

amiből ismeretessé válik a kezdeti szögsebesség:

$$\omega = \frac{F_s r}{\Theta} \cdot \Delta\tau.$$

Az erő (1), illetve (2) szerinti értékeivel:

$$\omega = \frac{2\mu m v_y r}{\Delta t \cdot \Theta} \cdot \Delta\tau.$$

Ismét a $\Delta t = \Delta\tau$ feltétel alapján kapjuk, hogy a kezdeti szögsebesség:

(4) $$\omega = \frac{2\mu m v_y r}{\Theta}.$$

(3) és (4) ismeretében számítható a mechanikai energiaveszteség:

$$E = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{\Theta\omega^3}{2} = 2m\mu^2 v_y^2 + \frac{2m^2\mu^2 v_y^2 r^2}{\Theta}.$$

Mivel $v_y^2 = 2gh$, továbbá, labda esetében $\Theta = 2mr^2/3$, az energiaveszteség:

(5) $$E = \mu^2 mgh + 6\mu^2 mgh = 10\mu^2 mgh.$$

Számadatainkkal $v_y = 2\ m/s,\ v_x = 1$ m/s, $\omega = 150$ s^{-1}, $E = 3{,}75 \cdot 10^{-3}$ joule $= 0{,}893 \cdot 10^{-3}$ cal.

Azonban eredményünk csak az energiaveszteség lehetséges felső határát adja meg. Lehetséges, hogy a vízszintes impulzusösszetevő és a szögsebesség előbb szűnt meg, mint a benyomódás, vagyis $\Delta\tau < \Delta t$. Ekkor v_x és ω is kisebb a (3) és (4) által megadott értékeknél, a vízszintes sebesség és szögsebesség az induláskor kevesebb volt, mint amit számítottunk, így a mozgási energia vesztesége szintén kevesebb, mint amit az (5) alatti eredmény ad meg.

2. *Egy csillagászati távcső tárgylencséje $n_a = 2{,}5$, szemlencséje $n_b = 1{,}5$ törésmutatójú anyagból készült. Ha a távcsövet megtöltjük egy folyadékkal és ebbe a folyadékba mártva használjuk, akkor végtelenre való élesre állítása és nagyítása (pontosan: a szögnagyítás abszolút értéke) változatlan marad. Mennyi ennek a folyadéknak a törésmutatója? Mekkora a nagyítás?*

(Bodó Zalán)

Megoldás. Levegőben a tárgylencse, illetőleg szemlencse fókusztávolsága:

$$\frac{1}{f_a} = (n_a - 1)\cdot K, \qquad \frac{1}{f_b} = (n_b - 1)\cdot L.$$

Itt a lencsék rádiuszait tartalmazó rövidítések:

$$K = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \qquad L = \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{\mathrm{II}}}.$$

Az n törésmutatójú folyadékba való mártáskor a fókusztávolságok:

$$\frac{1}{F_a} = \frac{n_a - n}{n}\cdot K, \qquad \frac{1}{F_b} = \frac{n_b - n}{n}\cdot L.$$

A nagyítás a levegőben, illetve a folyadékban:

$$\frac{f_a}{f_b} = \frac{n_b - 1}{n_a - 1}\cdot\frac{L}{K}, \qquad \frac{F_a}{F_b} = \frac{n_b - n}{n_a - n}\cdot\frac{L}{K}.$$

Írjuk fel a nagyítások egyenlőségét:

$$\frac{n_b - 1}{n_a - 1} = \frac{n_b - n}{n_a - n}.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása $n = 1$, vagyis a levegőben használt távcső. De ha az egyik távcső Kepler-féle, a másik Galilei-féle, akkor az egyenlet:

$$\frac{n_b - 1}{n_a - 1} = -\frac{n_b - n}{n_a - n}.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása:

$$n = \frac{2n_a n_b - n_a - n_b}{n_a + n_b - 2} = 1{,}75.$$

Számítsuk a nagyítást. A távcső változatlan hossza folytán:

$$f_a + f_b = F_a + F_b;$$

felhasználva a fókusztávolságok értékeit:

$$\frac{1}{(n_a - 1)K} + \frac{1}{(n_b - 1)L} = \frac{n}{(n_a - n)K} + \frac{n}{(n_b - n)L},$$

aminek rendezéséből egy feltétel adódik a lencsék geometriai adataira vonatkozóan:

$$\frac{L}{K} = -\frac{n_b(n_a-n)(n_a-1)}{n_a(n_b-n)(n_b-1)}.$$

Ezt felhasználva a távcső nagyításánál:

$$\frac{f_a}{f_b} = \frac{n_b-1}{n_a-1} \cdot \frac{L}{K} = \frac{n_b(n_a-n)}{n_a(n-n_b)}.$$

Az n-re kapott eredményünket ide helyettesítve:

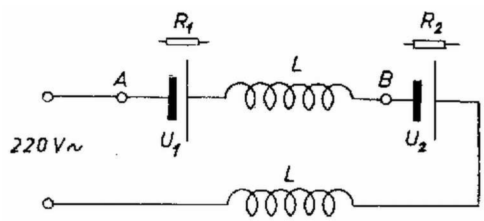
$$\frac{f_a}{f_b} = \frac{n_b(n_a-1)}{n_a(n_b-1)} = \frac{9}{5},$$

illetve

$$\frac{F_a}{F_b} = -\frac{9}{5},$$

3. *A 7. ábra szerint* 220 *voltos hálózati feszültségre kapcsoltunk két egyenlő önindukciója tekercset és két galvántelepet, amelyeknek elektromotoros ereje* $U_1 = 50$ volt, *illetve* $U_2 = 100$ volt *és belső ellenállásuk nem elhanyagolható. A váltakozó áram erőssége a feszültséghez képest* 45° *-os fáziskésésben van. Az* A *és* B *pontokra kapcsolt egyenáramú feszültségmérő nem mutat feszültséget. Mennyit mutat az* A *és* B *pontokra kapcsolt váltakozó áramú feszültségmérő?*

(Wiedemann László)



7. ábra

Megoldás. Egyenáramú voltmérő esetében a helyzet olyan, mintha az áramkörben csak a galvántelepek adnának feszültséget,a 220 voltos váltakozó áramú feszültségforrás rövidre volna zárva és az önindukcióknak sincs szerepük. Ekkor

$$U_1 = iR_1,$$
$$U_1 + U_2 = i(R_1 + R_2);$$

innen $R_2 = 2R_1$.

A váltakozó áramnál a. 45°-os fáziskésés miatt $2\omega L = R_1 + R_2$, így $R_1 = 2\omega L/3,\ R_2 = 4\omega L/3$.

Az eredő impedancia:

$$Z = \sqrt{(R_1+R_2)^2 + (2\omega L)^2} = 2\sqrt{2}\omega L.$$

Az áramerősség:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{2\sqrt{2}\omega L}.$$

Az A és B pontok között az impedancia:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}(\omega L)^2 + (\omega L)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \omega L,$$

az erre jutó feszültség:

$$U = IZ_1 = \frac{U}{2\sqrt{2}\omega L} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \omega L = \frac{\sqrt{26}}{12} \cdot U = 0{,}425U = 93{,}5 \text{ volt}.$$

III. (kísérleti) forduló

A II. forduló dolgozatai alapján 19 versenyző kísérletező versenyen vett részt Budapesten az ELTE Természettudományi Karának Általános Fizikai Tanszékén. Három feladattal foglalkoztak: megfelelő eszközzel igazolni kellett a fizikai inga lengésidőképletét, elemezni kellett egy elektromos kapcsolást és váltakozó áramú ellenállást kellett mérni.

Az 1974. évi fizikai tanulmányi verseny eredménye:

I, díj: *Csuka Gábor* (Budapest, Apáczai Csere Gimn. IV. o. t., tanára: Turtóczky Sándor).

II. díj: *Pálfalvi György* (Győr, Révai Miklós Gimn. TV. o. t., tanára: Székely László).

III. díj: *Kertész Gábor* (Budapest, 1. István-Gimn. IV. o. t., tanára: Cseh Géza).

A további helyezettek: 4. *Vecsernyés Péter* (Szeged, Radnóti Milós Gimn. IV. o. t., Maláj Györgyné), 5. *Vladár Károly* (Kiskunhalas, Szilády Áron Gimn. IV. o, t., Péter Irén), 6. *Németh Tibor* (Budapest, Berzsenyi Gimn. IV. o. t., Hubert Györgyné), 7. *Simányi Nándor* (Budapest, József Attila Gimn. TV. o. t., Ujj János), 8. *Meszéna Géza* (Budapest, Berzsenyi Gimn. TV. o. t., Apró Pál), 9. *Keskeny András* (Eger, Gárdonyi Géza Gimn. o. t., Bodnár István), 10. *Szuhay Péter* (Budapest, I. István Gimn. ÍV. o. t., Cseh Géza).