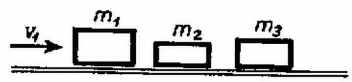
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 20-án rendezte ez évi, az 1916 óta tartott versenyek sorában ötvenedik versenyét Budapesten és 7 vidéki városban az idén érettségizettek és középiskolai tanulók számára. A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. A versenyzők száma 329 volt. Ismertetjük a feladatokat és megoldásukat.

1. *Súrlódásmentes, egyenes, vízszintes sínen két kocsi áll, m_2 és m_3 tömegekkel (1. ábra). Balról egy m_1 tömegű kocsi érkezik tetszőleges v_1 sebességgel. Legyen $m_1 = 8$ kg, $m_3 = 6$ kg. Elképzelhető-e olyan m_2 tömeg, hogy az összes ütközés lezajlása után a középső kocsi újra éppen nyugalomba kerül? Valamennyi ütközés tökéletesen rugalmas.*

(Károlyházy Frigyes)



1. ábra

Megoldás. Ha az összes ütközés lezajlása után m_2 nyugalomban marad, akkor kihagyható az impulzus- és energia-megmaradás egyenleteiből. A rugalmas ütközés utáni sebességek az impulzus és energia megmaradásán alapuló ismert képletek szerint:

$$u_1 = 2c - v_1, \qquad u_3 = 2c - v_3,$$

ahol c a közös súlypont sebessége: $c = \dfrac{m_1 v_1 + m_3 v_3}{m_1 + m_3}$. Mivel most $v_3 = 0$, a mi esetünkben az ütközés utáni sebességek:

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_3)}{m_1 + m_3},$$
$$u_3 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_3}.$$

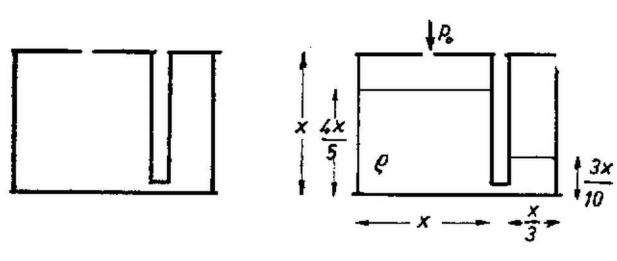
A végén m_1 sebessége negatív kell, hogy legyen, ennek feltétele: $m_3 > m_1$. Ez adatainkra nem teljesül, tehát nem lehet megfelelő m_2 tömeget találni.

2. *Egyenlő oldalú hengerből és ugyanakkora magasságú, egyharmad átmérőjű hengerből álló edényt alul elhanyagolható térfogatú cső köt össze. A vékonyabb henger zárt, a vastag henger felül nyitott (2. ábra baloldali rajza). Az üres hengerbe addig töltünk higanyt, amíg a vastag henger négyötöd részig, a vékony henger háromtized részig telik meg. Hány cm^3 higany van most az edényben? A légköri levegő nyomása* 1033 p/cm^2, *a higany sűrűsége 13,6 g/cm^3.*

(Lipták László)

Megoldás. Tekintsük először a hengerek x magasságát ismeretlennek. Felírjuk Boyle–Mariotte törvényét a vékony hengerbe zárt levegőre:

$$p_0 x \cdot \frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left[p_0 + \left(\frac{4x}{5} - \frac{3x}{10}\right)\varrho\, g\right] \cdot \frac{7x}{10} \cdot \frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{3}\right)^2 .$$



2. ábra

Innen:

$$x = \frac{6p_0}{7\varrho\, g} = \frac{6 \cdot 1033 \cdot \mathrm{p/cm^2}}{7 \cdot 13{,}6 \cdot \mathrm{g/cm^3} \cdot 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}} = \frac{6 \cdot 1033}{7 \cdot 13{,}6 \cdot 9{,}8} \cdot \frac{10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot \mathrm{kg \cdot m/s^2 \cdot cm}}{10^{-3} \cdot \mathrm{kg \cdot m/s^2}} = 65\ \mathrm{cm}.$$

A higany térfogata:

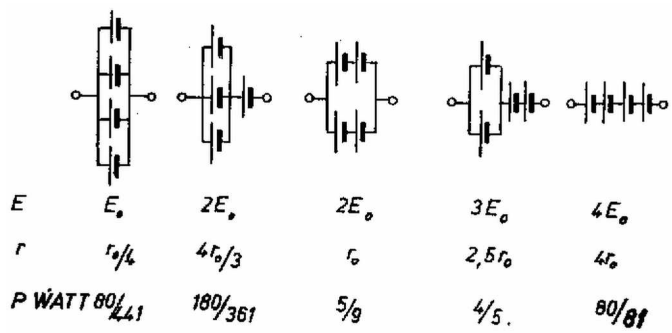
$$\frac{4x}{5} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot x^2 + \frac{3x}{10} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \frac{5\pi}{24} \cdot x^3 = 0{,}654x^3 = 179\ 600\ \mathrm{cm}^3.$$

A feladat szövegében először meglepő, hogy csupa relatív adatból kíván konkrét, méretes eredményt, de a numerikus adatok a nyomás és sűrűség értékeiben rejtőznek.

3. *Adott N darab egyformán E_0 elektromotoros erejű és r_0 belső ellenállású galvánelem, valamint egy R ellenállás. Hogyan kapcsoljuk össze az elemeket, hogy a keletkező telep a lehető legnagyobb teljesítményt szolgáltassa az R ellenáláson? Mekkora lesz ez a teljesítmény? Vizsgáljuk meg a problémát a következő numerikus értékek mellett:* $E_0 = 1$ volt, $r_0 = 1$ ohm, $R = 5$ ohm, $N_1 = 4$, *illetőleg* $N_2 = 100$.

(Radnai Gyula)

Megoldás. A 3. ábra mutatja 4 elem esetében az egyszerű elrendezéseket, amikor csak egyenlő elektromotoros erejű összeállítások kerülnek párhuzamosan egymás mellé.



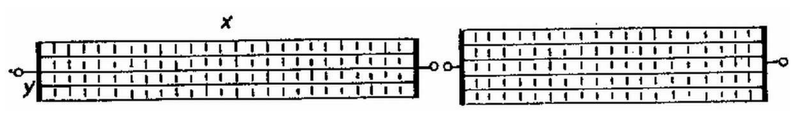
3. ábra

E elektromotoros erő esetében, r belső ellenállás mellett az áramerősség $i = E/(r+R)$, a kapocsfeszültség $U = ER/(r+R)$, a teljesítmény:

$$P = E^2R \cdot \frac{1}{(r+R)^2} = \frac{E^2R}{r^2} \cdot \frac{1}{(1+R/r)^2}.$$

A 3. ábrán látható adatokból kitűnik, hogy a tisztán soros kapcsolás ebben az esetben a legkedvezőbb $80/81 = 0{,}988$ watt teljesítménnyel. Az egyenlő belső és külső ellenállású esethez tartozó maximum $E^2R/4r^2 = 1{,}25$ watt volna.

100 elem esetében már célszerű valamilyen rendszer alapján elindulni.



4. ábra

Ha az elemeket téglalap alakjában rendezzük el y sorban és mindegyikben x elemmel (4. ábra), akkor az elektromotoros erő $E = xE_0$, a belső ellenállás $r = xr_0/y$, és a teljesítmény, felhasználva, hogy $xy = N$:

$$P = \frac{x^2E_0^2R}{x^2r_0^2/y^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + yR/(xr_0)\right]^2} = \frac{E_0^2R}{r_0^2} \cdot \frac{N^2}{\left[x + NR/(r_0x)\right]^2}.$$

Ennek a függvénynek ott van maximuma, ahol a nevezőben levő négyzetalapnak minimuma van. Ez akkor következik be, ha

$$x = \sqrt{\frac{NR}{r_0}};$$

ebben az esetben $y = \sqrt{Nr_0/R}$, az egész telep belső ellenállása $r = R$, és a teljesítmény $P = E_0^2N/4r_0$. $N = 100$ esetében $x = \sqrt{500} = 24{,}2$, $y = \sqrt{20} = 4{,}84$ és $P = 25$ watt volna. Minimum–esetünket egészszámos összeállítással kell megközelítenünk. Ilyeneket mutat táblázatunk:

x	y	r ohm	P watt
10	10	1	$125/9 = 13{,}889$
20	5	4	$2000/81 = 24{,}691$
25	4	6,25	$2000/81 = 24{,}691$
50	2	25	$125/9 = 13{,}998$

A P függvény $x = \sqrt{NR/r_0}$-ig nő, azután csökken és elég lapos maximumot mutat. Táblázatunk két középső sora jelenti a maximális teljesítményt.

Érdekes, hogy ha nem téglalapos elrendezéssel (például 15 elem 5 sorban párhuzamosan, azután ezekkel $4 \cdot 4$ és $3 \cdot 3$ sorban) kierőszakoljuk a pontosan 5 ohmos belső ellenállást, akkor a teljesítmény csak $125/5 = 24{,}2$ watt. A vegyes téglalapos és különböző elektromotoros erejű részeket párhuzamosan tartalmazó kapcsolásokat nehéz áttekinteni, ezek között eddig még nem sikerült olyat találni, amelynek a teljesítménye elérte volna a 2000/81 wattot.

A verseny eredménye. Az 1973. évi Eötvös–verseny összevont díjait egyenlő arányban megosztva kapták *Kertész Gábor,* a budapesti I. István Gimnázium IV. osztályában Cseh Géza tanítványa, *Koltai Ferenc* honvéd (a budapesti I. István Gimnáziumban érettségizett mint Moór Ágnes tanítványa), *Meszéna Géza,* a budapesti Berzsenyi Gimnázium IV. osztályában Apró Pál tanítványa és *Simányi Nándor,* a budapesti József Attila Gimnázium IV. osztályában Ujj János tanítványa. Dicséretet kaptak könyvjutalommal *Nuspl János* honvéd (a bajai III. Béla Gimnáziumban érettségizett mint Pécsi József tanítványa), *Prőhle Péter,* a budapesti Fazekas Gimnázium IV. osztályában Szücs Barna tanítványa és *Vojtilla László,* a miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem hallgatója (a miskolci Földes Ferenc Gimnáziumban érettségizett mint Polák Gabriella tanítványa).