I. megoldás. $n=1,2,3$ esetében rendre

$$b_1=a_1=\frac{19}{24}\qquad\left(=1-\frac{5}{24}=1-\frac{5}{3\cdot 2\cdot 2^2}\right),$$

$$b_2=b_1+a_2=\frac{15}{16}\qquad\left(=1-\frac{1}{16}=1-\frac{6}{3\cdot 4\cdot 2^3}\right),$$

$$b_3=b_2+a_3=\frac{313}{320}\qquad\left(=1-\frac{7}{320}=1-\frac{7}{4\cdot 5\cdot 2^4}\right).$$

Látjuk, hogy a b_n sorozat monoton növekvő – hiszen $a_n>0$ –, és b_3 alulról közelíti az 1-et. Erre támaszkodva írtuk fel b_1, b_2, b_3 értékét $1-h$ alakban, ahol a h hiány értéke 1/4,8, 1/16, 1/45,7, tagról tagra kisebb, másrészt $a_4<h_3$, tehát $b_4<1$ is áll.

Azt várjuk, hogy a $h_n=1-b_n$ kifejezés egyszerűen előállítható n függvényeként. Mivel h_n-et természetes számokból számítjuk ki, a h_1 és h_3 számlálójában álló 5, ill. 7 számban $(n+4)$-et sejtjük, a nevezők szerkezetére pedig az $(n+1)(n+2)\cdot 2^{n+1}$ szorzatot. Erősíti várakozásunkat, hogy bővítéssel h_2 is ilyen alakra hozható (lásd a zárójelbeli továbbalakításokat).

Teljes indukcióval bebizonyítjuk ezekből kiindulva, hogy

(1) $$b_n=1-\frac{n+4}{(n+1)(n+2)\cdot 2^{n+1}}.$$

Valóban, ha valamely n-re ez teljesül, akkor

$$b_{n+1}=b_n+a_{n+1}=$$
$$=1-\left(\frac{n+4}{(n+1)(n+2)\cdot 2^{n+1}}-\frac{(n+4)^2+3}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdot 2^{n+2}}\right)=$$
$$=1-\frac{(n+4)\{2n+6-(n+4)\}-3}{(n+1)(n+2)(n+3)\cdot 2^{n+2}},$$

a számláló

$$(n+4)(n+2)-3=n^2+6n+5=(n+1)(n+5),$$

tehát

$$b_{n+1}=1-\frac{n+5}{(n+2)(n+3)\cdot 2^{n+2}},$$

amint vártuk. Ezzel *zárt* kifejezést kaptunk b_n-re (azaz olyat, amely nem tartalmaz $\sum$ jelet, „...” jelet, vagyis közbülső tagok kiszámítása nélkül bármely n-re direkt kiszámíthatóvá teszi b_n-et).

Megmutatjuk (1) alapján, hogy a b_n sorozat 1-hez konvergál. Valóban, $n\geqq 4$ esetén, bármely előre megadott $\varepsilon>0$ esetében

$$|1-b_n|=|h_n|=\frac{n+4}{(n+1)(n+2)\cdot 2^{n-1}}<\frac{2n}{n\cdot n\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{n\cdot 2^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

mihelyt $n>1/\varepsilon$.

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk, a feladatot megoldottuk.

Pallagi Dezső (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)
Kovács István (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Az $(n+3)^2+3=n^2+6(n+2)$ azonosság alapján az a_n tag így alakítható:

$$2^{n+1}a_n=\frac{n^2}{n(n+1)(n+2)}+\frac{6(n+2)}{n(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{n}{(n+1)(n+2)}+\frac{6}{n(n+1)}=n\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{1+n}\right)=$$
$$=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{2}{n+2}\right)+\frac{6}{n}-\frac{6}{n+1}=\frac{6}{n}-\frac{7}{n+1}+\frac{2}{n+2}.$$

Eszerint

(2) $$a_n=\frac{3}{n\cdot 2^n}-\frac{7}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}+\frac{1}{(n+2)\cdot 2^n},$$

vagyis a_n eredeti nevezőjének n, $n+1$, $n+2$ tényezői a háromtagú összegnek csak 1–1 tagjában szerepelnek.

A $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ összes tagjait (2) alapján felbontva olyan törteket kapunk, amelyek nevezőjében $k \cdot 2^k$ alakú szorzatok állnak. Általában $k \cdot 2^k$ nevezőjű tört az a_i sorozat három tagjának felbontásában keletkezik, az

$$a_{k-2} = \frac{3}{(k-2) \cdot 2^{k-2}} - \frac{7}{(k-1) \cdot 2^{k-1}} + \frac{4}{k \cdot 2^k},$$
$$a_{k-1} = \frac{3}{(k-1) \cdot 2^{k-1}} - \frac{7}{k \cdot 2^k} + \frac{4}{(k+1) \cdot 2^{k+1}},$$
$$a_k = \frac{3}{k \cdot 2^k} - \frac{7}{(k+1) \cdot 2^{k+1}} + \frac{4}{(k+2) \cdot 2^{k+2}}$$

felbontásokból. Mivel az $a_{k-2} + a_{k+1} + a_k$ összegben az $\dfrac{1}{k \cdot 2^k}$ tag együtthatója $(4-7+3)=0$, azért a $k \cdot 2^k$ nevezőjű törtek összege a teljes $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ összegben 0. Igaz ez mindazokra a k természetes számokra, amelyekre a_{k-2}, a_{k-1}, a_k a fenti összegben valóban előfordul, vagyis amelyekre $3 \leqq k \leqq n$ teljesül. Ezeken kívül a b_n-et előállító összegben még a $k=1,2$ és a $k=n+1$, $n+2$ számokból kapott $k \cdot 2^k$ nevezőjű törtek szerepelnek, tehát b_n egyenlő ezek összegével:

$$b_n = \frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{7}{2 \cdot 2^2} + \frac{3}{2 \cdot 2^2} + \frac{4}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} - \frac{7}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} + \frac{4}{(n+2) \cdot 2^{n+2}} =$$
$$= 1 - \frac{3}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} + \frac{4}{(n+2) \cdot 2^{n+2}}.$$

(A $k=1$ érték mellett csak a_1, a $k=2$ mellett a_1 és a_2, a $k=n+1$ érték mellett a_{n-1} és a_n, végül $k=n+2$ mellett csak a_n felbontását kellett figyelembe vennünk a fenti összeg felírásához.)

Ebből pedig $\lim b_n = 1$, mert a második és a harmadik tag határértéke 0.

Csetényi Artúr (Szeged, Radnóti M. Gimn., IV. o. t.)
Dombovári Tamás (Budapest, I. István Gimn., III. o. t.)