(1) $$\frac{s_a^2}{bc}+\frac{s_a^2}{ca}+\frac{s_a^2}{ab}\geq\frac{9}{4}.$$

I. megoldás. A súlyvonalak kifejezhetők az oldalakkal. Tükrözve a háromszöget az a oldal felezőpontjára, a kapott paralelogramma oldalai b és c, átlói a és $2s_a$. A Pitagorasz-tétel ismételt alkalmazásával könnyen adódik, hogy paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalainak négyzetösszegével, tehát esetünkben

$$a^2+4s_a^2=2(b^2+c^2),\qquad s_a^2=(2b^2+2c^2-a^2)/4.$$

Ezt és s_b^2, s_c^2 hasonló kifejezését (1)-be helyettesítve, $4abc$-vel szorozva, rendezve, az adódó

$$a(2b^2+2c^2-a^2)+b(2c^2+2a^2-b^2)+c(2a^2+2b^2-c^2)-9abc\geq 0$$

egyenlőtlenség ekvivalens az állítással.

A bal oldalt tovább alakítva

$$2a(b-c)^2+2b(c-a)^2+2c(a-b)^2-(a^3+b^3+c^3-3abc)\geq 0,$$

illetve mivel a kivonandó négytagú így írható:

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\big\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\big\},$$

azért elég ezt bizonyítanunk:

(2) $$(b-c)^2\left(2a-\frac{a+b+c}{2}\right)+(c-a)^2\left(2b-\frac{a+b+c}{2}\right)+$$
$$+(a-b)^2\left(2c-\frac{a+b+c}{2}\right)\geq 0.$$

A kifejezés szimmetriája alapján választhatjuk úgy a háromszög oldalainak betűzését, hogy $a\geq b\geq c\,(>0)$. Ekkor (2) bal oldalának első két szorzata nem negatív, hiszen

(3) $$2a-\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}\big(a+(a-b)+(a-c)\big)>0,$$
$$2b-\frac{a+b+c}{2}=\frac{1}{2}(2b+b-a-c)\geq\frac{1}{2}(2c+b-a-c)=\frac{1}{2}(b+c-a)>0.$$

A (2) harmadik szorzata, P_3 lehet negatív is; megmutatjuk azonban, hogy a P_2 második szorzat és P_3 összege nem negatív. Valóban, (3) alapján P_2-ben $(c-a)^2$ helyére $(b-a)^2$-t írva nem növelünk:

$$P_2+P_3\geq(b-a)^2\left(2b-\frac{a+b+c}{2}\right)+(a-b)^2\left(2c-\frac{a+b+c}{2}\right)=(a-b)^2(b+c-a),$$

ebből állításunk nyilvánvaló és ezzel az előrebocsátottak szerint (1)-et bebizonyítottuk.

II. megoldás. Az 1856. feladat megoldásából közbülső eredményként kiolvashatjuk,[1] hogyha A, B, C egy háromszög csúcsai, ennek oldalai $AB=c$, $BC=a$ és $CA=b$, P a tér tetszőleges pontja, α, β, γ pozitív számok, akkor

$$\alpha\cdot PA^2+\beta\cdot PB^2+\gamma\cdot PC^2\geq\frac{\alpha\beta c^2+\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Legyenek most a súlyok

$$\alpha=\frac{1}{bc},\qquad\beta=\frac{1}{ca},\qquad\gamma=\frac{1}{ab},$$

másrészt speciálisan P-ként az ABC háromszög súlypontját véve

$$PA=\frac{2}{3}s_a,\qquad PB=\frac{2}{3}s_b,\qquad PC=\frac{2}{3}s_c$$

és ezeket beírva a feladat állítását kapjuk.

[1] Lásd ezen számban, a 122. oldalon, (5)-ben, ahol α, β és γ speciális értékeit még nem vettük figyelembe.