

I. megoldás. Helyettesítsük K számlálójába a háromszög szögeinek a cosinustétel alapján az oldalakkal való kifejezéseit és hozzunk közös nevezőre:

$$a \cos \alpha + b \cos \beta - c \cos \gamma = \frac{1}{2abc} \{a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) - c^2(a^2 + b^2 - c^2)\} = \frac{c^4 - (a^4 - 2a^2b^2 + b^4)}{2abc} = \frac{(c^2 - a^2 + b^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{2abc} = 2c \cos \alpha \cos \beta.$$

(Az utolsó lépésben ismét a cosinustételt használtuk fel.)

Eredményünkéből a , b és c oldalaknak – és ennek megfelelően a β és γ szögeknek a – felcserélésével kapjuk, hogy K nevezője $2b \cos \alpha \cos \gamma$ -val egyenlő. Ebből egyrészt az következik, hogy K csak akkor van értelmezve, ha sem α , sem γ nem derékszög, másrészt kapjuk, hogy ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$, akkor

$$K = \frac{c \cos \beta}{b \cos \gamma}.$$

Ezt a sinustétel alapján tovább egyszerűsíthetjük:

$$K = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \gamma \operatorname{ctg} \beta.$$

II. megoldás. A $2r = a/\sin \alpha = b/\sin \beta = c/\sin \gamma$ és ismert goniometriaival összefüggések alapján K -t átalakítva kapjuk, hogy

$$K = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma}{\sin 2\alpha - \sin 2\beta + \sin 2\gamma} = \frac{\sin 2\alpha + 2 \cos(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma)}{\sin 2\alpha + 2 \cos(\beta + \gamma) \sin(\gamma - \beta)} = \frac{\sin \alpha - \sin(\beta - \gamma)}{\sin \alpha - \sin(\gamma - \beta)} = \frac{\sin(\beta + \gamma) - \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta + \gamma) - \sin(\gamma - \beta)} = \frac{\cos \beta \sin \gamma}{\sin \beta \cos \gamma} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Közben $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ alapján felhasználtuk, hogy $\cos(\beta + \gamma) = -\cos \alpha$ és hogy $\sin \alpha = \sin(\beta + \gamma)$. Mivel a harmadik alakban $\cos \alpha$ -val egyszerűsítettünk, átalakításunk akkor érvényes, ha $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, és K utolsó alakja akkor van értelmezve, ha $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$.

Könnnyen látható, hogy ha akár α , akár γ derékszög, akkor K eredeti alakjában is 0-val egyenlő a nevező.

Megjegyzés. Mivel K számlálója is, nevezője is hosszúság, azért maga K pusztán szám, csak a szögektől, a háromszög alakjától függhet. Így természetes, hogy a végső alakban csak két szög lépjen föl, hiszen már két szög meghatározza a háromszög alakját.