I. forduló, kezdők (legfeljebb I. osztályosok) részére

1. Melyik a nagyobb: 3^{400} vagy 4^{300}?

2. Helyes-e a következő állítás?
„Ha egy négyjegyű (egész) szám két-két számjegye egyenlő, akkor a szám osztható vagy 11-gyel vagy 101-gyel."

3. Igaz-e, hogy bármely egyenlő szárú háromszögben az egyik szárhoz tartozó magasságnak van olyan pontja, amelyből ez a szár tompaszögben látszik ?

4. A földrajzból ismert Baktérítő azonos a $23^\circ\ 27'$ déli szélességű párhuzamos körrel, az Északi-sarkkör pedig azonos a $66^\circ\ 33'$ északi szélességű párhuzamos körrel.

Mutassuk meg, hogy e két kör síkjának távolsága egyenlő a két kör sugarainak összegével. (A Földet itt természetesen gömb alakúnak tekintjük.)

5. Pista vásárolt egy körzőt, egy ceruzát és egy radírt. Ha egy körző ötödébe, a ceruza a felébe és egy radír a kétötödébe kerülne, akkor 8 Ft-ot; ha egy körző a felébe, egy ceruza a negyedébe és egy radír a harmadába kerülne, akkor 12 Ft-ot fizetett volna. Mennyit fizetett? A körző vagy a ceruza a drágább?

6. Melyek azok az x, y egész számok, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$2x^2y^2 + y^2 = 6x^2 + 12.$$

7. Jelentsenek A és B természetes számokat.

Bizonyítandó, hogy ha $(A^2 + AB + B^2)$ osztható $(A + B)$-vel, akkor $(A^4 + B^4)$ osztható $(A + B)^2$-nel.

8. *a*) Adott egy konvex tízszög, oldalai különböző hosszúak. Hányféleképpen lehet a csúcsai közül négyet úgy kiválasztani, hogy az ezek által meghatározott konvex négyszög mindegyik oldala a tízszögnek átlója legyen?

b) Hogyan alakul a válasz, ha a kiindulási tízszög szabályos, és nem tekintünk különbözőnek két olyan kiválasztott négyszöget, amelyek egymásba átvihetők elfordítással vagy tükrözéssel?

9. Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai AB és DC. Messék az A és D, ill. B és C csúcsoknál levő belső szögek szögfelezői egymást a trapéz M, ill. N belső pontjaiban. Fejezzük ki az MN szakasz hosszat a trapéz oldalainak segítségével.

10. Adott egy hegyesszög és belsejében egy P pont. Szerkesszünk P-n keresztül olyan egyenest, hogy az a legkisebb területű háromszöget messe le a szögből.

11. Mutassuk meg, hogy paralelogrammát nem lehet két egyenes vágással három, egyenlő területű háromszögre felbontani.

12. Mutassuk meg, hogy $(2k + 1)$ db (k természetes szám), azonos jegyre végződő természetes azám összege és szorzata is ugyanarra a jegyre végződik, mint maguk a számok.

I. forduló, haladók (legfeljebb II. osztályosok) részére

1. Egy 7,5 m hosszú létra úgy támaszkodik egy függőleges falhoz, hogy az alja 2 m 10 cm-re van a fal tövétől. A létra úgy csúszik meg, hogy a fölső vége 120 cm-rel lejjebb kerül. Mennyivel távolodott a létra alsó vége a fal tövétől?

2. Matföldön r fitying egy peták, r peták egy batka és r batka egy garas. A batkák, petákok és fityingek számát ebben a sorrendben egymás után írva, valaki $4, 4, 0$-ért vesz egy autót és 1 garasból $3, 4, 0$-t kap vissza. Mekkora az r váltószám?

3. Egy termelőszövetkezet két földjén a termésátlag:

m holdon a mázsa holdanként,
n holdon b mázsa holdanként $(a < b)$.

Valaki úgy számolta ki az átlagtermést az összes földön, hogy a és b számtani közepét vette. Mikor helyes ez az eredmény, mikor nem? Ha nem helyes, akkor a helyes átlagértéknél kisebbet kapott-e vagy nagyobbat?

4. Mekkora b, ha az

$$x^2 + bx - 7 = 0$$

egyenlet gyökeinek különbsége

$$x_1 - x_2 = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{7}.$$

5. Írjunk fel y-ra egy olyan egyenletet, melynek gyökeihez található a

$$2x^2 + 3x + y - 2 = 0$$

és

$$2x + y + 3 = 0$$

egyenlőségeket kielégítő x érték.

6. Jelöljük az ABC háromszög B és C pontból induló magasságvonalának és a háromszög köré írt körének a második metszéspontját B', ill. C'-vel és legyen $B'C' = l$. Jelöljük továbbá a háromszög A csúcsánál fekvő szögét α-val és a magasságpontnak az AB oldaltól mért távolságát t-vel.

Szerkesztendő a háromszög az adott l és t szakaszból és α szögből.

7. Bizonyítandó, hogy ha a és b egész, akkor

$$a(a-1)(a-2)(a-3) - b(b-1)(b-2)(b-3)$$

osztható $2(a-b)$-vel.

8. Az AD mint átmérő fölé rajzolt félkörív egyik pontja B, a BD ív egy további pontja C; az AC és BD húr metszéspontja E. Bizonyítsuk be, hogy

$$AD^2 = AE \cdot AC + DE \cdot DB.$$

9. Bizonyítandó, hogy ha a $P(x)$ egészegyütthatós polinom helyettesítési értéke az $x = 0$ és az $x = 1$ helyen páratlan, akkor a $P(x) = 0$ egyenletnek nincs egész gyöke.

10. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög A csúcsát a B pont körül, B-t a C körül, ..., F-et az A körül $90°$-kal mindkét irányba elforgatjuk. A kétféle elforgatással két újabb szabályos hatszög jön létre. Egyikük az eredeti hatszög belsejébe esik, a másik az eredeti hatszöget tartalmazza. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti hatszög két nem szomszédos oldalegyenesének metszéspontján átmegy a külső hatszög egyik oldala és a belső hatszög egyik oldalának meghosszabbítása is.

11. Mutassuk meg, hogy ha n egész szám, akkor az

$$f(n) = 16\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]^2 + \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)\left(\left[\frac{n}{2}\right]^2 + 2\left[\frac{n}{2}\right]\right) + 8\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]^2 + 2\left[\frac{n}{2}\right]\right) - 4\left(\left[\frac{n}{2}\right]^2 + 2\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

függvény értékkészlete csupa négyzetszámból áll. Itt $[x]$ azt a legnagyobb egész számot jelenti, amelyik még nem nagyobb x-nél; négyzetszám pedig valamilyen természetes szám négyzete.

12. Mi a sík azon $P(x, y)$ pontjainak mértani helye, amelyek koordinátáira nézve

$$\sqrt{x} \le \sqrt{-y}.$$

II, forduló kezdők (legfeljebb I. osztályosok), általános tantervű osztályok részére

1. Oldjuk meg x-re a következő egyenletet:

$$\frac{x+2ab}{a+b-c} + \frac{x-2ab}{a-b+c} = \frac{x+2ab}{a+b+c} + \frac{2ab-x}{b+c-a}.$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex négyszög belsejében található olyan pont, amelyet a csúcsokkal összekötve négy egyenlő területű háromszöget kapunk, akkor ez a pont rajta van a négyszög valamelyik átlóján.

3. Határozzuk meg az összes olyan p (pozitív) törzsszámot és k természetes számot, amelyre $p^k - 1$ köbszám.

II. forduló kezdők (legfeljebb I. osztályosok), szakosított matematika I. tantervű osztályok részére

1. Határozzuk meg azon (a, b, c) számhármasokat, amelyekre az

$$y = ax + b$$
$$y = bx + c$$
$$y = cx + a$$

egyenletrendszernek van megoldása.

2. Adott a síkban a k kör és az A, B pontok, továbbá egy d hosszúságú szakasz. Szerkesszünk a k körön olyan egymástól d távolságra levő P és Q pontokat, amelyekre az AP és BQ egyenesek párhuzamosak.

3. Azonos az általános tantervű osztályok 3. feladatával.

II. forduló kezdők (legfeljebb I. osztályosok), matematika II. tantervű osztályok részére

1. Van-e olyan n páratlan természetes szám, amelyre $(n+2)$ négyzetszám és $(n-2)$ köbszám?

2. Egy konvex hétszög mindegyik oldalára kifelé szabályos háromszöget szerkesztettünk és kijelöltük ezek $O_1, O_2, \ldots, O_7$ középpontjait.

Szerkesszük meg az eredeti hétszöget csupán az $O_1O_2 \ldots O_7$ hétszög ismeretében.

3. A sík minden pontját megszíneztük három szín valamelyikével.

Bizonyítsuk be, hogy található olyan egységnyi hosszúságú szakasz, amelynek végpontjai ugyanolyan színűek.

II. forduló haladók (II. osztályosok), általános tantervű osztályok részére

1. Határozzuk meg a vízszintes terepen fekvő és a következő feltételek mellett a legrövidebb idő alatt körüljárható 25 km^2 területű sokszög alakját:

a) A sokszög minden oldala részint az É–D-i, részint a K–Ny-i iránnyal párhuzamos;

b) A körüljárás sebessége É–D-i irányban 3 km/óra, K–Ny-i irányban 2 km/óra.

2. Egy háromszög három csúcsát összekötjük az idom valamelyik belső pontjával, majd az így létrejött hat egyenesszakaszt (a háromsszög három oldalát és a három összekötő szakaszt) 1-től 6-ig tetszőleges sorrendben megszámozzuk. Ezután ugyanilyen ábrán a szakaszok végigszámozását tetszőleges másféle sorrendben megismételjük. Bizonyítsuk be, hogy az $1, 2, \ldots, 6$ szám két olyan hármas csoportra bontható, amelyek közül semelyik sem alkot háromszöget egyik ábrán sem.

3. Az $ABCD$ négyszög átlóinak metszéspontja M. Tükrözzük A-t az MC felezőpontjára, B-t pedig az MD felezőpontjára, így nyerjük az A^*, ill. B^* pontokat. Messe a CD egyenes az AB egyenest a P pontban, az A^*B^* egyenest a P^* pontban. Bizonyítsuk be, hogy

$$PC = P^*D.$$

II. forduló haladók (II. osztályosok), szakosított matematika I. tantervű osztályok részére

1. Az ABC derékszögű háromszögben a derékszög C csúcsából húzott magasság talppontja legyen D, a D pont merőleges vetülete a BC, ill. AC befogókon legyen E, ill. F. Jelöljük AE és BF metszéspontját G-vel. Mutassuk meg, hogy az ABG háromszög területe megegyezik a $CFGE$ négyszög területével.

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n (≥ 1) természetes számra

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 2.$$

3. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$ valós számok. Igazoljuk, hogy bármilyen sorrendben is írjuk le őket, mindig van vagy 7 olyan, egymás után következő szám, amelyek összege nem negatív vagy 11 olyan egymás után következő szám, amelyek összege nem pozitív.

II. forduló haladók (II. osztályosok), szakosított matematika II. tantervű osztályok részére

1. Azonos a matematika I. tantervű osztályok 1. feladatával.

2. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n > 0$ egész számra igaz a következő egyenlőtlenség

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}} < 4.$$

3. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ olyan természetes számok, amelyekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{20} < 70.$$

Bizonyítsuk be, hogy az $a_j - a_i$ különbségek között, ahol $1 \leq i < j \leq 20$, van legalább négy egyenlő.