I. forduló

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^2+5x+4=5\sqrt{x^2+5x+28}.$$

2. Az alábbi kifejezés egyes tagjainak nincs értelme, ha α 45° vagy 225°. Van-e a kifejezésnek határértéke, ha α az egyik vagy másik szöghöz tartó olyan sorozaton fut végig, amelynek elemeire van értelme az egyes tagoknak?

$$(1+\operatorname{tg}2\alpha)\cos\alpha+\operatorname{tg}2\alpha\sin\alpha+\frac{1+\sin2\alpha+\cos2\alpha}{2(\sin\alpha-\cos\alpha)}.$$

3. Az $a_1,a_2,\dots,a_n$ valós számok négyzeteinek összege legyen A. Legyen továbbá az

$$\begin{aligned}&a_2-a_1,\\&a_3-a_1,\ a_3-a_2,\\&\ \vdots\\&a_n-a_1,\ a_n-a_2,\ a_n-a_3,\ \dots,\ a_n-a_{n-1}\end{aligned}$$

különbségek négyzeteinek összege B.

Bizonyítsuk be, hogy

$$B\le nA.$$

4. Egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a és b, $a<b$. Mekkora a derékszöget harmadoló egyenesek háromszögbe eső szakaszai közül a rövidebb?

5. A 49 négyzetszám. Írjunk 48-at a két számjegy közé: 4489 szintén négyzetszám. Írjunk újra 48-at a szám közepébe: 444 889 ugyancsak négyzetszám. Folytathatjuk-e ezt akármeddig úgy, hogy mindig négyzetszámot kapjunk?

6. Adott 100 darab szám, $a_1,a_2,\dots,a_{100}$, amelyekre teljesül az alábbi 100 egyenlőtlenség:

$$a_1-3a_2+2a_3\ge0, \tag{1}$$
$$a_2-3a_3+2a_4\ge0, \tag{2}$$
$$a_{99}-3a_{100}+2a_1\ge0, \tag{99}$$
$$a_{100}-3a_1+2a_2\ge0. \tag{100}$$

Bizonyítsuk be, hogy $a_1=a_2=\ldots=a_{100}$.

7. Határozzuk meg az összes olyan polinomot, amelynek a $2x$ helyen vett helyettesítési értéke minden x-re megegyezik első és második deriváltja x helyen vett helyettesítési értékeinek a szorzatával. (Egy polinom második deriváltján deriváltjának a deriváltját értjük.)

8. Egy absztrakt állat egy egységsugarai gömbfelületen bolyong. Lépéseinek a hossza $1,99$ (ennyi a két végpont által meghatározott egyenesszakasz hossza). Útja során egyetlen lépést sem tehet meg mindjárt utána visszafelé.

Legalább hány lépés kell ahhoz, hogy visszaérjen oda, ahonnan elindult?

II. forduló
Általános tantervű osztályok részére

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra fennáll $a>b>c>0$, akkor

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}>0.$$

2. Jelölje $F(n)$ az n természetes szám pozitív osztóinak számát. Bizonyítandó, hogy $F(n)<n^{5/6}$, ha $n>2$.

3. Adott sugarú körlemez érinti valamely téglatest egyik szögletét alkotó három sík mindegyikét. Mi a körlemez középpontjának mértani helye, ha a körlemez minden fent leírt helyzetet elfoglal?

Matematika I. szakosított tantervű osztályok részére

1. Adott a síkban 11, egy ponton átmenő egyenes: $a_1,a_2,\dots,a_{11}$; közöttük nincs két egymásra merőleges. Az a_1 egyenes tetszőleges A_1 pontjából merőlegest állítunk az a_2 egyenesre, ez az a_3 egyenest A_3 pontban metszi. Az A_3-ból

az a_4-re állított merőleges a_5-öt az A_5-ben metszi, az A_5-ből az a_6-ra emelt merőleges pedig a_7-et az A_7-ben. Ezt az eljárást folytatva kapjuk még rendre az A_9, A_{11}, A_2, A_4, A_6, A_8, A_{10} pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az A_{10}-ből az a_{11}-re állított merőleges az a_1 egyenest az A_1 pontban metszi.

Mely n egészekre igaz még, hogy n számú, egy ponton átmenő egyenesre a fenti eljárást alkalmazva az n-edik lépésben az A_1-be jutunk vissza?

2. Mutassuk meg, hogy minden $r \geq 0$ egész számhoz megadhatók olyan, csupán az r-től függő $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ számok, hogy tetszőleges $k > r$ mellett teljesül az

$$\left(1-\frac{3}{k}\right)\left(1-\frac{3}{k-1}\right)\left(1-\frac{3}{k-2}\right)\cdots\left(1-\frac{3}{k-r}\right)=1-\frac{a(r)}{k}-\frac{b(r)}{k-1}-\frac{c(r)}{k-2}$$

egyenlőség.

3. Egy 9×9-es sakktábla négyzetmezőibe tetszőleges sorrendben beírjuk az $1, 2, \ldots, 81$ számokat. Bizonyítsuk be, hogy található két olyan négyzet, melyeknek van közös oldaluk és a bennük levő számok különbsége nagyobb 5-nél.

Matematika II. szakosított tantervű osztályok részére

1. Az $ABCD$ és $AEFG$ egy síkban fekvő négyzetek egyező körüljárás szerint vannak betűzve. A BE és DG egyenesek a K, ill., L pontban metszik a négyzetek középpontjait összekötő egyenest, egymást pedig az M pontban. Mit mondhatunk az $AMKL$ négyszögről?

2. Megegyezik a matematika I. osztályok 3. feladatával.

3. Az a_n sorozatról tudjuk, hogy $a_1 = 1$, és

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{S_n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ahol $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Bizonyítsuk be, hogy *a)* a_n minden határon túl nő, és *b)* $n(a_n^2 - a_{n-1}^2)$ tart 2-höz, ha n minden határon túl nő.

III. forduló
Általános tantervű osztályok részére

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$y^2z - \frac{1}{16} = z^2x - \frac{1}{6} = x^2y + \frac{1}{6} = xyz.$$

2. Legfeljebb hány tagból állhat egy olyan mértani sorozat, amelynek tagjai 100 és 1000 közötti különböző egész számok?

3. Válasszunk ki tetszés szerint egy szabályos tizenötszög csúcsai közül hetet, és tekintsük azt a konvex hétszöget, amelynek csúcsai a kiválasztott hét csúcspont. Forgassuk el a tizenötszöget középpontja körül egymás után tizennégyszer úgy, hogy mindegyik elforgatással önmagába menjen át, közben egy tetszőlegesen kiszemelt csúcsa – valamilyen sorrendben – az összes többibe!

Bizonyítsuk be, hogy ezalatt a konvex hétszög csupa olyan hétszögbe megy át, amelyek egymástól is és az eredeti hétszögtől is különbözők.