A Matematikai Lapok 1972. évi 1–2. számában Pelikán József ismerteti a csoportelmélet legegyszerűbb megoldatlan problémáit. Közülük az elsőről – többek között – ezt írja: „A probléma O. Ju. Smidt problémája néven ismeretes, mert ő vetette fel 1938-ban."

A középiskolai negyedik osztály fizika tankönyvében a 325. oldalon ezt olvashatjuk: „...O. J. Smidt szovjet csillagász... szerint a Naprendszer kisebb égitestjei nem a Napból váltak ki, hanem a csillagok közötti térben található, a világűrben lebegő hideg, meteorikus por- és gáztömegből sűrűsödtek össze."

Az elmúlt évben jelent meg Alina és Czeslaw Centkiewicz „A könyörtelen Északi sark" című könyve, amelynek egyik lapjáról szőrmekucsmás, deres szakállú férfi néz ránk. Az aláírás: Otto J. Smidt. A könyvből megtudhatjuk, hogy Smidt több sarkvidéki utazás után 1937-ben jutott el az Északi sarkra.

A matematikus, a csillagász és a sarkutazó Smidt – egy és ugyanaz az ember, megcáfolva a köz hiedelmet, amely szerint századunkban a tudományok fejlődése és szétválása miatt már nem lehetnek polihisztorok. Ennek a rendkívüli tudósegyéniségnek a rendhagyó életpályáját vázoljuk fel az alábbiakban, majd megpróbáljuk elvezetni az olvasót – felsőbb algebrai előismeretek feltételezése nélkül – Smidt klasszikus csoportelméleti problémájához.

1. Otto J. (Juljevics) Smidt 1891-ben született. Első matematikai eredménye — amelyet húsz évesen ért el, egy csapásra ismertté tette nevét – a csoportelmélet klasszikus tételei közé tartozik. De még többet mond egyéniségéről a következő kis történet.

Kijevi egyetemista korában Smidt összeírta azokat a témákat és könyveket, amelyekről úgy vélte, hogy alapos tanulmányozásuk szükséges az önmagától elvárt műveltségi szint eléréséhez. Elkészült a terv; azonnal kiderült azonban, hogy megvalósításához kb. 1000 év kellene. Fájó szívvel kihagyta belőle mindazt, ami bármilyen fontos, mégis nélkülözhető. Újabb becslése azt mutatta, hogy a maradék terv teljesítéséhez még mindig 250 évre van szükség. „Lesz, ami lesz" – gondolta Smidt – „többet kihagyni lehetetlen!" – és hozzáfogott...

Huszonöt éves volt, amikor megjelent „Absztrakt csoportelmélet" című könyve. A következő év – 1917 – Smidt sorsának alakulásába beleszól a történelem. A fiatal tudóst, aki csak pár hónappal korábban kezdte meg előadásait a kijevi egyetemen, Petrográdba küldték egy tanácskozásra. Ott érte a forradalom, amelyhez szívével és eszével egyaránt csatlakozott. A forradalomnak szüksége volt Smidt kivételes tudására, s ugyanakkor lehetővé tette ragyogó szervezőkészségének kibontakoztatását. A fogyasztási szövetkezetektől az egyetemi oktatásig alig volt olyan terület, amelyről a forradalom vezetői ne kérték volna ki véleményét. 1922-től néhány évig a Szovjetunió könyvkiadását irányította.

A tudományos munkához a húszas évek derekán tért vissza. Először egy fontos gyakorlati problémát oldott meg: kidolgozta az érctelepek Eötvös–inga segítségével történő helymeghatározásának matematikai elméletét. Ettől kezdve egyre inkább foglalkoztatták a Föld titkai. 1928-ban Smidt, a moszkvai egyetem matematika-professzora, nyári szabadság helyett egy expedíció tagjaként a Pamír-hegységbe utazott és részt vett a Föld egyik legnagyobb gleccserének (Fedcsenko-gleccser) feltérképezésében. A rákövetkező évben jégtörő hajón vezetett expedíciót a Ferenc József földre.

A következő tíz év az Északi-sarkvidéké. Legfontosabb állomásai: 1932-ben Smidt expedíciója egyetlen hajózási idényben (két hónap alatt) átkel az Észak keleti Átjárón, azaz északról megkerüli Szibériát. A következő évben egyszerű teherhajón vág neki az útnak, hogy bebizonyítsa az Átjáró alkalmasságát szállítási célokra. Az első kísérlet nem sikerül: hajója jégbe fagy, majd elsüllyed. Smidt embereivel az úszó jégen ver tábort, s két hónapon keresztül – a mentőexpedíció megérkezéséig – tovább folytatják megfigyeléseiket. A váratlanul hosszúra nyúlt sarkvidéki utazás alkalmat ad arra, hogy Smidt előadásokat tartson az expedíció érdeklődő tagjai számára – filozófiából, irodalomból, csillagászatból. Maradék idejében pedig soron következő csoportelméleti cikkén dolgozik.

Sarkvidéki útjainak koronája az 1937. évi, amikor repülőgéppel leszáll az Északi sarkon. A következő évben még egy sarkvidéki út következik – a hetedik –, s ekkor be kell látnia, hogy egészsége már nem a régi. Miután temérdek új adattal gazdagította a földrajzot és a geológiát, átengedi Észak küzdőterét a fiatalabbaknak.

Most következhetnének a viszonylagos pihenés évei.

Otto J. Smidt akadémikus, a Szovjetunió Hőse, a szovjet fiatalság bálványa, világhírű felfedező, kinek nevét Nansen és Amundsen mellett emlegetik a moszkvai egyetem algebratanszékét vezeti. Ez és még néhány tudományos tisztség bárki más számára elegendő programot nyújtana. az élet hátralevő részére. De nem Smidt számára. A másfél évtized alatt felhalmozódott elméleti meggondolások és gyakorlati tapasztalatok Földünk – és a Naprendszer – keletkezésének új elméletét érlelik megnyugvást nem ismerő agyában. Az elmélet kialakulását késlelteti az a körülmény, hogy a háború kitörése után ő irányítja a Szovjet Tudományos Akadémia intézményeinek a keleti országrészekbe való áttelepítését. 1943 őszén elhangzik Smidt első előadása a Föld keletkezéséről.

Smidt elmélete mély matematikai és fizikai meggondoláson alapul, és magyarázatot ad a Naprendszer és a Föld számos tulajdonságára. Minderről részletesen és közérthetően olvashatunk Smidt „Négy előadás a Föld keletkezésének elméletéről" című, magyarul 1952-ben megjelent könyvecskéjében.

Élete utolsó évtizede szakadatlan küzdelem a betegséggel. A munka gyógyszer számára, és Smidt nem csökkenti az adagokat: kutatóintézetet irányít, folyóiratot szerkeszt, emellett szüntelenül dolgozik elmélete tökéletesítésén. 1954-ben ágynak esik, de tovább folytatja minden tevékenységét. Úgyszólván munka közben éri a halál 1956-ban.

2. A „csoport" szónak a matematikában köznapi jelentésétől eltérő értelme van. Hogy ehhez eljussunk, induljunk ki az egész számok halmazából és az összeadás műveletéből. Ennek a halmaznak és műveletnek jól ismerjük a következő tulajdonságait:

I. Egész számokat összeadva egész számot kapunk.

II. Az egész számok összeadása asszociatív.

III. Van olyan egész szám, amelyet bármely a egész számmal összeadva a-t kapjuk eredményül. (Ilyen egész szám a 0.)

IV. Bármely b egész számhoz van olyan egész szám, amelyet b-vel összeadva 0-t kapunk eredményül. (Ilyen egész szám a $-b$.)

A III. tulajdonságban említett számot az összeadásra vonatkozó (idegen szóval additív) *neutrális elemnek*, a IV. tulajdonságban szereplö számot pedig b additív *inverz elemének* nevezzük.

Alakítsuk most át az I–IV. mondatot úgy, hogy egész szám helyett pozitív valós számot, összeadás helyett szorzást mondunk. Figyeljük meg, hogy az átalakított mondatok is igazak! Most azonban a III. követelményt nem a 0 szám, hanem 1 elégíti ki – tehát 1 a szorzásra vonatkozó (multiplikatív) neutrális elem; a c pozitív valós szám multiplikatív inverze pedig $\frac{1}{c}$.

Kísérletezzünk tovább! Egész számok helyett most vizsgáljuk egy adott α sík önmagára való egybevágósági leképezéseit, az összeadást pedig helyettesítse az „egymás után való elvégzés". Vegyük észre, hogy az I–IV. mondatok ennek megfelelően átalakítva is értelmesek és igazak maradnak. Most a neutrális elem az a leképezés, amely α minden pontját változatlanul hagyja. (Gondoljuk meg, mi lesz egy egybevágósági leképezés inverze!)

Az eddigiekben megfigyeltük, hogy egyes, matematikai meggondolásokban gyakran előforduló halmazok (számok, ill. leképezések halmazai) együtt bizonyos műveletekkel (összeadás, szorzás, egymás után végzés) olyan természetűek, hogy rájuk az I–IV. tulajdonságok megfelelői érvényesek. A példák számát nehézség nélkül szaporíthatnánk. Ez a tény azt sugallja, hogy érdemes lenne tetszőleges olyan halmaz–művelet párokat vizsgálni, amelyek az I–IV. tulajdonságokkal rendelkeznek, hiszen az ezekre vonatkozó általános törvényszerűségeket sok konkrét esetre alkalmazhatnánk. Fogalmazzuk tehát újra az I–IV. tulajdonságrendszert úgy, hogy benne az egész számok halmaza és az összeadás művelete helyett tetszőleges (azaz közelebbről meg nem határozott) halmaz és művelet szerepeljen.

Jelöljön M egy halmazt, amelynek elemei akármilyen dolgok lehetnek. Rendelkezzen ez a halmaz egy művelettel, amelyet a $\bigcirc$ (olvasd: kör) jellel fogunk megjelölni. Ez részletesebben azt jelenti, hogy ha az a, b dolgok M-hez tartoznak, akkor $a \bigcirc b$ is valamilyen dolgot jelöl, amelyet az a-n és b-n elvégzett $\bigcirc$ művelet eredményének nevezünk (mint ahogy $a+b$ is egy számot jelent, valahányszor a és b egész számokat jelentenek). Tegyük fel, hogy az M halmazra és a $\bigcirc$. műveletre igazak a következők:

I$'$. Ha a és b M-hez tartozik, akkor $a \bigcirc b$ is.

II$'$. Ha a, b és c M-hez tartozik, akkor $(a \bigcirc b) \bigcirc c = a \bigcirc (b \bigcirc c)$.

III$'$. Van olyan e eleme M-nek, hogy bármely M-beli a-ra $a \bigcirc e = a$ igaz.

IV$'$. Bármely M-hez tartozó b-hez van olyan b' M-ben, amelyre $b \bigcirc b' = e$ igaz.

Ezzel el is jutottunk a csoport matematikai fogalmához: *csoportnak* nevezzük bármely olyan M halmaz és $\bigcirc$ művelet együttesét, melyek rendelkeznek az I$'$–IV$'$. tulajdonságokkal. Az utóbbi tényt úgy is kifejezhetjük, hogy M *csoportot alkot a $\bigcirc$ műveletre nézve.* Kiindulási megfigyeléseink tehát azt jelentik, hogy az egész számok az összeadásra nézve, a pozitív valós számok a szorzásra nézve, továbbá adott α sík önmagára való egybevágósági transzformációi az egymás után való elvégzésre nézve csoportot alkotnak.

Az egész számok csoportja *végtelen csoport* (ti. végtelen sok egész szám van). Másik két csoportunk is végtelen. Vannak *véges* (= véges sok számú elemből álló) *csoportok* is; pl. a -1 és 1 számokból álló halmaz csoportot alkot a szorzásra nézve. (Ellenőrizzük!)

Most figyeljük meg, hogy a páros számok is csoportot alkotnak az összeadásra nézve. A páros számok ott vannak az egész számok között, de nem minden egész szám páros szám; ezt röviden úgy szokás kifejezni, hogy a páros számok az egész számok halmazának valódi részhalmazát alkotják. Ezzel összhangban úgy mondjuk, hogy a páros számok (összeadásra nézve alkotott) csoportja az összes egész számok csoportjának *valódi részcsoport*ja. Másik példa: a pozitív racionális számok csoportot alkotnak a szorzásra nézve, amely valódi részcsoportja az összes pozitív valós számok csoportjának.

Előfordulhat, hogy egy csoport helyettesíthető egy másikkal. Vegyük például a pozitív valós számok csoportját a szorzás műveletére nézve. Ez a szorzás helyettesíthető a valós számok összeadásával: pozitív valós számok szorzását úgy végezhetjük, hogy vesszük (pl. 10-es alapú) logaritmusukat, ezeket összeadjuk, s a kapott valós szám lesz a keresett szorzat logaritmusa, amelyből az egyértelműen megállapítható. Általánosabban, ha az M_1 és M_2 csoportokhoz van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya M_1, értékkészlete M_2, s amelynek segítségével M_1 műveletét M_2 műveletével helyettesíthetjük (úgy, ahogyan a logaritmusfüggvény segítségével a pozitív valós számok szorzását helyettesítjük a valós számok összeadásával), akkor M_1 és M_2-t nem tekintjük lényegesen különbözőnek. Ilyenkor röviden azt mondjuk, hogy M_1 és M_2 *izomorf.* (A szó eredeti jelentése: „megegyező alakú".)

Az eddigiekben megismert fogalmak már elegendők O. Ju. Smidt problémájának megfogalmazásához. Rédei László által bevezetett szóhasználattal nevezzük *első fokban végtelennek* az olyan csoportot, amely maga végtelen ugyan, de valódi részcsoportjai mind végesek. Elsőfokban végtelen csoportokat kaphatunk a következő módon: vegyünk egy p prímszámot és tekintsük az összes olyan nem negatív, 1-nél kisebb racionális számot, amelyet relatív prím egészek hányadosaként felírva $\frac{a}{p^k}$ alakú (ahol k is egész; $k > 0$ és $0 \leqq a < p^k$). Jelölje e számok halmazát P. Ha $k_1 \leqq k_2$, akkor a $\frac{a}{p^{k_1}} + \frac{a}{p^{k_2}} = \frac{ap^{k_2-k_1}+b}{p^{k_2}}$, tehát a tekintett alakú számok összege is ugyanolyan alakú, bár előfordulhat, hogy az összeg már nem kisebb 1-nél. Módosítsuk tehát a P-beli számok összeadását úgy, hogy ha az összeg eléri vagy meghaladja 1-et, akkor eggyel csökkentjük. Röviden: a módosított összeg a közönséges összeg ún. törtrésze. Ekkor a P halmaz a módosított összeadásul együtt eleget tesz az I'. követelménynek. Nem nehéz utánagondolni, hogy P csoportot alkot a módosított összeadásra nézve $\left(\text{pl. neutrális elem a 0; } \frac{a}{p^k} \text{ inverze } \frac{p^k-a}{p^k} \text{ stb}\right)$.

Az így nyert csoport szokásosabb jelölése $C(p^\infty)$. Látjuk, hogy $C(p^\infty)$ végtelen csoport. Másrészt az is igaz, hogy $G(p^\infty)$ minden valódi részcsoportja véges. Ennek belátásához először figyeljük meg, hogy az alábbi $G(p^0)$, $C(p^1), \ldots$ halmazok mind részcsoportjai $G(p^\infty)$-nek:

$$C(p^0): 0;$$

$$C(p^1): 0, \qquad \frac{1}{p}, \qquad \frac{2}{p}, \; \ldots, \qquad \frac{p-1}{p};$$

. . . .

$$C(p^k): 0, \qquad \frac{1}{p^k}, \qquad \frac{2}{p^k}, \; \ldots, \qquad \frac{p^k-1}{p^k};$$

. . . .

$C(p^1)$ tartalmazza $C(p^0)$-t, $C(p^2)$ $C(p^1)$-et és így tovább. Vegyük $C(p^\infty)$-nek egy tetszőleges C valódi részcsoportját. Akkor van olyan $\frac{a}{p^k}$ szám, amely nem tartozik C-be. Ha a és p^k relatív prímek, akkor $\frac{a}{p^k}C(p^k)$-ban van, de $C(p^{k-1})$-ben nincs benne. Ebből következik, hogy C nem tartalmazhat $C(p^{k-1})$-en kívüli számot, ugyanis (lássuk be!) bármely $C(p^{k-1})$-hez nem tartozó számot megfelelő sokszor összeadva (a módosított összeadással!) megkapjuk $\frac{a}{p^k}$-t. Így a C valódi részcsoport elemeinek száma legfeljebb p^{k-l}, tehát véges.

Ezzel megmutattuk, hogy $C(p^\infty)$ első fokban végtelen csoport. Minden p prímszámhoz megalkothatjuk a $C(p^\infty)$ csoportot; így első fokban végtelen csoportok egy sorozatát kapjuk.

O. Ju. Smidt problémája a következő: *igaz-e, hogy minden első fokban, végtelen csoport izomorf a $C(p^\infty)$ csoportok valamelyikével?*

A rendelkezésünkre álló fogalmak rendszere túlságosan szűkös ahhoz, hogy a probléma puszta megfogalmazásán túljussunk. Azok számára, akiket a csoportok közelebbről érdekelnek, J. Grossmann–W. Magnus „Csoportok és gráfjaik”, vagy Fried Ervin „Absztrakt algebra elemi úton” című könyvét ajánlhatjuk.