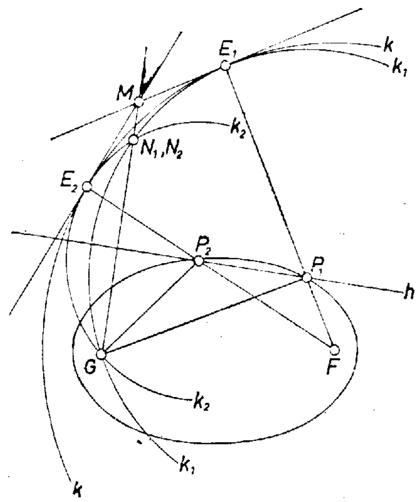
Jelöljük az FP_i félegyenes és az F körüli $2a$ sugarú k kör metszéspontját E_i-vel ($i = 1, 2$; $2a$ szokás szerint a nagytengely hossza). P_i a k belsejében van, mert $FP_i < 2a$. Rajzoljuk meg P_i körül az E_i-n átmenő k_i kört. Eszerint $P_iE_i < 2a$, k_i az E_i pontban belülről érinti k-t, és az ME_i egyenes közös érintőjük, továbbá $P_iE_i = FE_i - FP_i = 2a - FP_i = GP_i$, tehát k_i átmegy G-n. Jelöljük az MG egyenesnek k_i-vel való, G-től különböző metszéspontját N_i-vel, ekkor a körhöz külső pontból húzott érintő és szelő szakaszai közti ismert összefüggés[1] szerint (1. ábra):

$$MN_1 = \frac{ME_1^2}{MG} = \frac{ME_2^2}{MG} = MN_2 \qquad (1)$$

(az egymás utáni egyenlőségeket rendre k_1, k, k_2 alapján írtuk fel).



1. ábra

S mivel N_1 és N_2 az MG félegyenesen vannak (hiszen M kívül van k-n, G és N_i pedig benne vannak), azért N_2 azonos N_1-gyel. Így pedig P_1P_2 – mint a k_1 és k_2 középpontjait összekötő egyenes – merőleges az N_1G közös húrjukat tartalmazó MG egyenesre. Ezt kellett bizonyítanunk.

Előfordulhat, hogy MG érinti k_1-et, ekkor N_1-ként G értendő. Ekkor (1) szerint k_2-t is érinti, így k_1 és k_2 érintik egymást G-ben, G rajta van a $P_1P_2 = h$ egyenesen, és MG a GP_1-re is, GP_2-re is merőleges; az állítás ilyen esetben is helyes.

Az állításban szereplő M pont akkor és csak akkor nem jön létre, ha az FP_1, FP_2 félegyenesek egymás meghosszabbításába esnek, másképpen ha h átmegy F-en. Ilyen esetben az állítás tárgytalan.

Bartha Miklós (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., III. o. t.)
Kovács István (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Láttuk, hogy az ellipszisünk P pontja körül $(2a - FP)$ sugárral írt kör érinti k-t (természetesen belülről) és átmegy G-n. Ezt így is kimondhatjuk: azon körök középpontjainak mértani helye, amelyek érintik k-t és átmennek G-n, az az ellipszis, melynek nagytengelye $2a$ hosszúságú és fókuszai F és G. Ebben a felfogásban F és G szerepe különböző, k-t az ellipszis (egyik) vezérkörének nevezzük, F a vezérkör középpontja és G a fókusz. (Természetesen G-hez is tartozik egy vezérköre az ellipszisnek.) Ebből az értelmezésből több elemien bizonyítható érdekes tulajdonságát lehet belátni az ellipszis érintőinek, ha elfogadjuk az érintő következő definícióját: az ellipszis érintője minden olyan (a síkjában fekvő) egyenes, amelynek csak egy közös pontja van az ellipszissel.

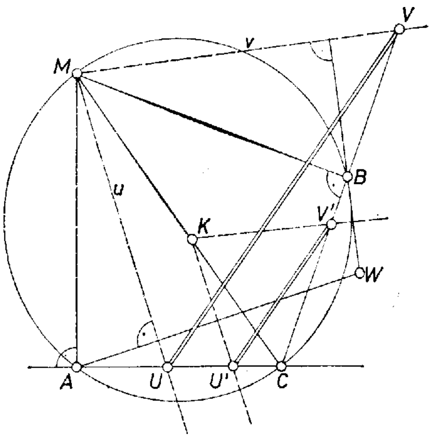
2. Megoldásunkban tulajdonképpen a következő állítást bizonyítottuk be. Legyen az E_1FM derékszögű háromszögben E_1-nek az FM átfogóra vonatkozó tükörképe E_2, és legyen G olyan pont, amelyik nincs rajta sem az E_1M, sem az E_2M egyenesen. Az E_iG szakasz felező merőlegese metszi az FE_i egyenest, jelöljük a metszéspontot P_i-vel ($i = 1, 2$). Azt állítjuk, hogy akkor P_1P_2 merőleges GM-re.

Ennek az állításnak a segítségével rövid bizonyítást adhatunk az 1967. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny II. fordulójában a matematikai osztályok részére kitűzött 2. feladatra.[2] A feladat szövege a következő volt. „Az MAB egyenlő szárú háromszög M csúcsán két egyenes megy át, u és v. Az A pontból u-ra, B-ből v-re bocsátott merőlegesek metszéspontja legyen W. Az A-ból MA-ra állított merőleges messe u-t U-ban, a B-ből MB-re állított merőleges messe v-t V-ben. Bizonyítandó, hogy UV merőleges MW-re.” (2. ábra.)

---

[1] Lásd pl.: *Horvay Katalin–Pálmay Lóránt:* Matematika a gimn. és szakközépisk. II. oszt. számára. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967. 175. old. 240. feladat.

[2] A feladat megoldása megjelent a következő helyen: *Bakos T.–Lőrincz P.–Tusnády G.:* Középiskolai Matematikai Versenyek az 1967. évben. Tankönyvkiadó. Budapest, 1970. 95. oldal.



2. ábra

Legyen ugyanis az A-ból MA-ra és B-ből MB-re állított merőlegesek metszéspontja C, messe WA, illetve WB felező merőlegese a CA, illetve CB egyenest az U', illetve a V' pontban, és legyen ennek a két felező merőlegesnek a metszéspontja K. Ez a K az ABW háromszög köré írható kör középpontja, tehát rajta van AB felező merőlegesén, MC-n. Így az a C centrumú centrális hasonlóság, amely M-et K-ba viszi, u-t KU'-be, v-t KV'-be, UV-t $U'V'$-be viszi. Elég tehát bizonyítani, hogy $U'V' \perp MW$, ez viszont épp a bevezetőben kimondott állítás, ha benne az E_1, E_2, F, M, G, P_1, P_2 pontok szerepét rendre A, B, C, M, W, U', V' veszi át.

(Tusnády Gábor)