Első feladat. *Milyen n és k természetes számok esetén alkot számtani sorozatot*

$$\binom{n}{k-1}, \qquad \binom{n}{k}, \qquad \binom{n}{k+1}?$$

A versenyzők egy része megmutatta, hogy $\binom{n}{k}$ a k-nak növekedő függvénye, ha $k \le \frac{n}{2}$, és csökkenő függvénye, ha $k \ge \frac{n}{2}$, s így a binomiális együtthatók csak a szöveg szerinti felsorolás sorrendjében alkothatnak számtani sorozatot. A versenybizottság enélkül is teljesnek fogadta el a különben helyes megoldást, éppen mivel a feladat sorrendben említi a három együtthatót.

Megoldás. A feladat követelménye szerint a szomszédos binomiális együtthatópárok különbsége egyenlő kell hogy legyen, vagyis a különbségek különbsége 0:

$$\binom{n}{k-1} - 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = 0. \tag{1}$$

Itt feltesszük, hogy $k-1 \ge 0$ és $k+1 \le n$, azaz

$$1 \le k \le n-1. \tag{2}$$

Ha az (1) egyenlőség teljesül – és csak akkor – alkot számtani sorozatot a három binomiális együttható.

Szorozzunk $(k+1)!(n-k+1)!/n!$-sal. Ez (2) folytán létezik és pozitív, így (1) akkor és csak akkor teljesül, ha

$$k(k+1) - 2(k+1)(n-k+1) + (n-k)(n-k+1) = 0,$$

$$n^2 - 4nk + 4k^2 - n - 2 = 0. \tag{3}$$

Eszerint

$$n = (n-2k)^2 - 2,$$

egy egész szám négyzeténél 2-vel kisebb:

$$n = u^2 - 2$$

alakú, ahol u természetes szám és itt $u = n-2k$ vagy $u = 2k-n$, azaz

$$k = k_1 = \frac{n-u}{2} = \frac{u^2-u}{2} - 1 = \binom{u}{2} - 1$$

vagy

$$k = k_2 = \frac{n+u}{2} = \binom{u+1}{2} - 1.$$

Az utolsó alakból látható, hogy k-ra egész értéket kapunk.

Itt $u \ge 2$ kell hogy legyen, hogy n pozitív egésznek adódjék. Az $u = 2$-höz tartozó két k értékre azonban (2) első, ill. második egyenlőtlensége nem teljesül.

Ha $u \ge 3$, akkor

$$k_1 = \binom{u}{2} - 1 \ge 1 \qquad \text{és} \qquad k_1 = \frac{n-u}{2} < n.$$

Mivel pedig $k_1 + k_2 = n$, és $k_1 < k_2$, így mindkét k érték kielégíti (2)-t.

A feladat követelményei teljesülésének szükséges és elégséges feltételéből indultunk ki és ekvivalens átalakításokat végeztünk, így azok az n, k számpárok felelnek meg, amelyeknél valamilyen 2-nél nagyobb u egésszel

$$n = u^2 - 2 \quad \text{és} \quad k = \binom{u}{2} - 1 \quad \text{vagy} \quad k = \binom{u+1}{2} - 1.$$

Megjegyzések. 1. Még az $u = 2$-höz tartozó $k = 0$ és $k = 2$ érték is elfogadható, ha $\binom{n}{k}$-n 0-t értünk, amennyiben k negatív vagy nagyobb, mint n. Ekkor ugyanis a 0, 1, 2, ill. a 2, 1, 0 számtani sorozatot kapjuk. (Egy versenyző azt is megjegyezte, hogy ezzel a megállapodással bármely pozitív egész n és $k \le -2$, ill. $k \ge n+2$ érték is megfelel.)

2. A könnyen igazolható

$$\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}$$

összefüggés két oldalából levonva (1) megfelelő oldalait, adódik, hogy a feladat követelménye akkor és csak akkor teljesül, ha

$$4\binom{n}{k} = \binom{n+2}{k+1}.$$

3. A (3) egyenletet 4-gyel szorozva és n szerint egészítve ki teljes négyzetté,

$$8k+9=(2n-4k-1)^2$$

adódik, ami páratlan szám négyzete. Ezt $2v+1$-gyel jelölve azt kapjuk, hogy

$$k=\frac{(2v+1)^2-9}{8}=\frac{v^2+v-2}{2}=\binom{v+1}{2}-1$$

és

$$2n-4k-1=2v+1 \qquad \text{vagy} \qquad 4k+1-2n=2v+1.$$

Innen

$$n=2k+v+1=v^2+2v-1=(v+1)^2-2$$

vagy

$$n=2k-v=v^2-2.$$

4. A megoldásban szereplő két k értékről leolvasható, hogy minden megengedett n értékhez tartozó nagyobbik k érték megegyezik a következő szóbajövő n értékhez tartozó kisebbik k értékkel.

5. Ha azt kérdezzük, alkothat-e háromnál több egymás utáni binomiális együttható számtani sorozatot, igen könnyű látni, hogy tagadó a válasz. Ekkor ugyanis a sorozat első, második és harmadik eleme is meg a második, harmadik és negyedik elem is háromtagú számtani sorozatot alkotna. Azonban a feladat megoldásában kiderült, hogy az egy n értékhez tartozó két k értéknek szimmetrikusan elhelyezkedő binomiális együtthatók felelnek meg, így a két nyert 3 elemű sorozat egyike növekedő, a másik csökkenő, nem lehetnek ugyanannak a sorozatnak egymás utáni elemei.

6. A számtani sorozatok az olyan sorozatok, amelyeknél a szomszédos elemek különbsége csupa egyező elemből álló sorozat. Hasonlóan vizsgálhatunk olyan sorozatokat – ún. másodrendű számtani sorozatokat –, amelyeknél ezek a különbségek alkotnak számtani sorozatot, és hasonlóan értelmezhetők magasabb rendű számtani sorozatok. Felmerül a kérdés: alkothat-e négy egymás utáni binomiális együttható másodrendű számtani sorozatot. A probléma a fentiekhez hasonlóan egy n-ben és k-ban harmadfokú egyenletre vezet. Található azonban végtelen sok megoldás a következő egyszerű meggondolással: Ha n páratlan, $2u+1$ alakú, akkor az n-hez tartozó binomiális együtthatók sorozatának közepén két egyenlő binomiális együttható áll és az ezek előtti és utáni binomiális együtthatók is egyenlők. A

$$\binom{2u+1}{u-1}, \quad \binom{2u+1}{u}, \quad \binom{2u+1}{u+1}, \quad \binom{2u+1}{u+2}$$

számok különbségei tehát a, 0, $-a$ alakúak, és ez számtani sorozat. Ez arra is vezet, hogy az említett harmadfokú egyenletet könnyű megoldani: a fellépő polinom egy első és egy másodfokú szorzatára bontható, s így már könnyen megtalálhatók a további megoldások.

Második feladat. *A sík derékszögű koordináta-rendszerének origója körül r sugarú kört rajzolunk. $\delta(r)$-rel jelöljük az egész koordinátájú pontok közül a körhöz legközelebbinek a körtől mért távolságát.*

Bizonyítsuk be, hogy $\delta(r)$ tetszés szerint kicsi, ha r-et elég nagynak választjuk.

(Pontnak körtől való távolságát úgy mérjük, hogy a ponton és a kör középpontján át egyenest fektetünk, és a pontnak az egyenes és a kör metszéspontjaitól mért távolságai közül a kisebbiket vesszük.)

A sík egész koordinátájú pontjait rácspontnak fogjuk nevezni.

I. megoldás. Feladatunk tetszés szerinti pozitív p értékhez olyan korlátot keresni, amelynél nagyobb r sugár esetén mindig van az r sugarú körtől p-nél kisebb távolságra levő rácspont. Kézenfekvő olyan egyenesen keresni ilyen rácspontot, amelyiken egyrészt sűrűn vannak rácspontok, másrészt, amelyik „lehetőleg jól simul" a körhöz, kis hegyes szögben metszi.[1] A rácspontok legsűrűbben – egymástól 1 távolságra – a koordinátatengelyekkel párhuzamos és a megfelelő tengelytől egész távolságra levő egyeneseken sorakoznak. Válasszuk pl. az y tengellyel párhuzamos ilyen egyenesek közül a legtávolabbit, amelyiknek még van közös pontja a körrel. Ennek az y tengelytől mért u távolságára

(1) $$u \le r < u+1 \qquad (u \text{ egész}).$$

Ezen az egyenesen a kört közrefogó (u,v), $(u,v+1)$ rácspontok ordinátájára

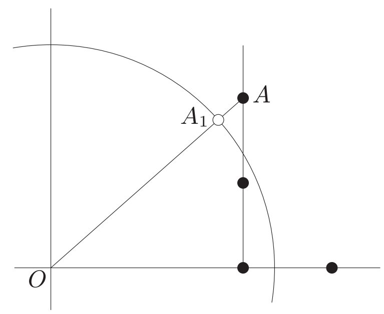
(2) $$u^2+v^2 \le r^2 < u^2+(v+1)^2 \qquad (v \text{ egész}).$$

[1] Egyenes és kör szögén az egyenesnek és a körrel való metszéspontjában a körhöz húzott érintőnek a szögét szokás érteni. Általában beszélünk két egymást metsző görbe szögéről a metszéspontjukban, – ezen a metszéspontban a görbékhez húzott érintők szögét értjük, feltéve, hogy mindkettőnek van egyértelműen meghatározott érintője ebben a pontban.

A körön kívül levő A rácspontot az O origóval összekötő egyenes messe a kört A_1-ben. Ekkor

$$\delta(r) \le AA_1 = OA - r = \sqrt{u^2 + (v+1)^2} - r = \frac{u^2 + (v+1)^2 - r^2}{\sqrt{u^2 + (v+1)^2} + r} =$$
$$= \frac{2v + 1 - (r^2 - u^2 - v^2)}{\sqrt{u^2 + (v+1)^2} + r} < \frac{2v+1}{2r},$$

ugyanis a számlálóban elhagyott kivonandó a (2) egyenlőtlenség első fele szerint nem negatív, a nevezőben levő négyzetgyök pedig az egyenlőtlenség második fele szerint nagyobb r-nél.



(2) első fele és (1) segítségével kapcsolatot találunk v és r között is:

$$v \le \sqrt{r^2 - u^2} = \sqrt{(r-u)(r+u)} < \sqrt{1 \cdot (r+r)} = \sqrt{2r}.$$

Ezt felhasználva, ha pl. $r > 1$, akkor

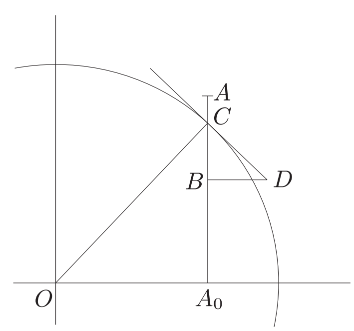
$$\delta(r) < \frac{2\sqrt{2r} + 1}{2r} < \frac{3\sqrt{r} + \sqrt{r}}{2r} < \frac{2}{\sqrt{r}}.$$

Így $\delta(r)$ biztosan kisebb lesz p-nél, amint

$$\frac{2}{\sqrt{r}} < p \qquad \text{azaz} \qquad r > \frac{4}{p^2} \qquad \text{és} \qquad r > 1.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Nyilvánvalóan nyerhettünk volna 2-nél kisebb számlálót a $\delta(r)$-re kapott felső korlátban, de ez nem volt célunk. Csupán azt akartuk belátni, hogy van olyan korlát, amelyiknél nagyobb r-ekre $\delta(r) < p$. Hogy mi a legkisebb ilyen korlát, az már a probléma szempontjából lényegtelen, annál is inkább, mert nem feltétlenül a fent kiválasztott A a körhöz legközelebbi rácspont.



2. Sok más módon is becsülték a versenyzők az $A(u, v+1)$ vagy $B(u, v)$ pont távolságát a körtől. Egy ilyen út a következő: az AB egyenes metszéspontját a körrel, ill. az x tengellyel jelölje C, ill. A_0, a B-n át az x tengellyel párhuzamosan húzott egyenes és a körhöz a C-ben húzott érintő metszéspontját D. Ekkor B távolsága a körtől kisebb, mint BD, így a BCD és A_0OC háromszögek hasonlósága folytán

$$\delta(r) < BD = \frac{BD}{1} = \frac{BD}{AB} < \frac{BD}{BC} = \frac{A_0C}{A_0O} = \frac{\sqrt{r^2 - u^2}}{u} <$$
$$< \frac{\sqrt{2r}}{u} < \frac{\sqrt{2r}}{r-1} < \frac{\sqrt{2r}}{r - \frac{r}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}},$$

ha $r > 2$; így

$$\delta(r) < p, \qquad \text{ha} \quad \text{egyidejűleg} \quad r > \frac{8}{p^2} \qquad \text{és} \qquad r > 2.$$

3. A feladat szoros kapcsolatban van a következő kérdéssel. Keressünk tetszés szerinti pozitív egész N számhoz olyan $M(N)$ számot, amelyre az N, $N + M(N)$ számközben van két négyzetszám összegeként írható szám.

Ha N-et a fenti megoldás r^2-ének választjuk, az $n = u^2 + (v+1)^2$ tekinthető egy közeli négyzetszámnak:

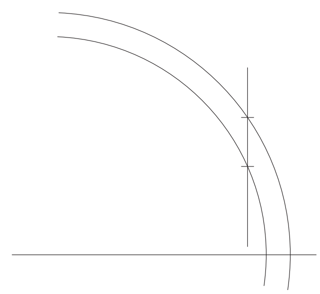
$$n - N = u^2 + (v+1)^2 - r^2 < 2v + 1,$$

és mivel $n - N$ egész, így

$$n - N \le 2v < 2\sqrt{2r} = \sqrt{8}\sqrt[4]{N}.$$

Az N, $N + \sqrt{8}\sqrt[4]{N}$ számközben tehát mindig van két négyzetszám összegeként írható szám.

II. megoldás. Mivel az $x = u$ (u pozitív egész) egyenlettel jellemzett egyenesen egységnyi távolságra követik egymást a rácspontok, így elég megmutatni, hogy tetszőleges pozitív p-hez, ha r elég nagy, választható u úgy, hogy az $x = u$ egyenletű egyenesnek az r és $r + p$ sugarú körök közti körgyűrűbe eső szakasza, – pl. az első síknegyedben – legalább 1 hosszúságú legyen. Ekkor ugyanis erre a szakaszra esik rácspont és az legfeljebb p távolságra van a körtől.



Válasszuk meg u-t az

$$u \le r < u + 1$$

feltétellel. Ha $u + 1 \le r + p$, akkor az $(u+1, 0)$ pont a körgyűrűbe esik; így elég csak azt az esetet vizsgálni, ha

$$u \le r < r + p < u + 1. \tag{3}$$

Ez eleve csak akkor teljesülhet, ha $p < 1$. Az említett szakasz h hosszára

$$h = \sqrt{(r+p)^2 - u^2} - \sqrt{r^2 - u^2} = \frac{(r+p)^2 - r^2}{\sqrt{(r+p)^2 - u^2} + \sqrt{r^2 - u^2}}.$$

Itt a számláló nagyobb, mint $2rp$, a nevezőben levő négyzetgyökök pedig így becsülhetők felülről (3) felhasználásával, ha pl. $r > 1$,

$$\sqrt{(r+p)^2 - u^2} = \sqrt{(r+p-u)(r+p+u)} < \sqrt{1 \cdot (r+1+r)} < \sqrt{3r},$$
$$\sqrt{r^2 - u^2} = \sqrt{(r-u)(r+u)} < \sqrt{1 \cdot 2r}.$$

Így

$$h > \frac{2rp}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\sqrt{r}} = \frac{2p}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{r},$$

tehát $h > 1$, ha

$$r > \frac{\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2}{4p^2} = \frac{5 + \sqrt{24}}{4} \cdot \frac{1}{p^2}.$$

Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

Harmadik feladat. *Adott a térben n sík ($n \ge 5$) úgy, hogy bármelyik háromnak pontosan egy közös pontja van, és nincs a térnek olyan pontja, amelyen közülük háromnál több menne át.*

Bizonyítsuk be, hogy azon térrészek között, melyekre a síkok a teret darabolják, legalább $\dfrac{2n-3}{4}$ tetraéder van.

Megoldás. Nevezzük röviden *csúcspontnak* az olyan pontot, mely három adott sík közös pontja. A feltételek szerint bármely három sík egyetlen csúcspontot határoz meg.

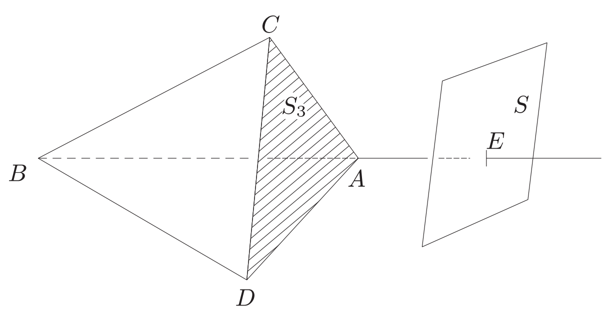
Jegyezzük meg továbbá, hogy négy adott sík mindig közrezár egy (és csakis egy) tetraédert. Ennek belátását az olvasóra bízzuk. Természetesen e tetraéderbe más sík belemetszhet, tehát általában nem szerepel a tekintett térrészek között.

Legyen mármost S egy adott sík és P olyan csúcspont, mely nincs az S síkon, de az összes olyan csúcspont között, mely S-nek P-vel azonos oldalán helyezkedik el, S-hez legközelebb van. Legyenek S_1, S_2, S_3 a P-t meghatározó síkok. Ekkor S, S_1, S_2, S_3 egy T tetraédert zár közre. *Állítjuk, hogy a T tetraédert további adott sík nem metszi, tehát T egyike azon térrészeknek, melyekre az n sík a teret darabolja.*

Tegyük fel, hogy egy további adott S' sík metszi a T tetraédert. Legyenek A, B, C a tetraéder P-től különböző csúcsai; A, B, C az S síkon helyezkedik el. Nyilvánvalóan kell, hogy az S' sík messe az AP, BP, CP szakaszok valamelyikét. Tegyük fel például, hogy S' az AP szakaszt metszi egy Q pontban. Ekkor Q is csúcspont, hiszen AP két adott sík metszésvonala, és így Q három adott sík metszéspontja. De Q közelebb van S-hez, mint P, ami ellentmond P választásának.

A fentiek alapján az adott síkok bármelyikéhez találhatunk rá támaszkodó tetraédert a síkok által létrehozott térrészek között. Sőt, ha S olyan sík, melynek mindkét oldalán van csúcspont, akkor S-re két ilyen tetraéder is támaszkodik.

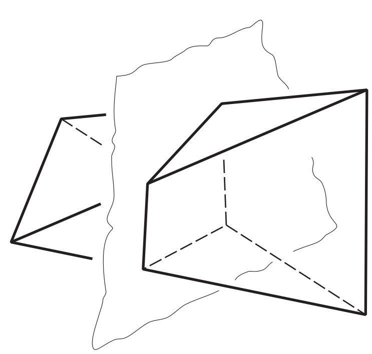
Állítjuk, hogy *legfeljebb három síknak lehet minden csúcspont ugyanazon az oldalán.* Tegyük fel, hogy négy ilyen sík is volna, S_1, S_2, S_3, S_4. Legyen $ABCD$ az S_1, S_2, S_3, S_4 által alkotott tetraéder, ahol S_1 az ABC, S_2 az ABD, S_3 az ACD, S_4 a BCD síkkal azonos. Mivel $n \geq 5$, van egy további S sík az adott síkok között. Az S sík nyilván nem metszheti az $ABCD$ tetraéder valamennyi élét, tehát például az AB él egyenesét egy, az élhez nem tartozó E pontban metszi. Legyen például E az AB egyenes A-ból kiinduló, B-t nem tartalmazó félegyenesén. Mármost E és B az $S_3 = ACD$ sík különböző oldalain elhelyezkedő csúcspontok, ami ellentmondás (1. ábra).



1. ábra

Számoljuk mármost össze a síkok által létrehozott térrészek közti tetraédereket úgy, hogy minden síkhoz megszámoljuk a rá támaszkodókat. Láttuk az előbb, hogy legfeljebb három kivételével minden síkra legalább két tetraéder támaszkodik; a „kivételes” síkokra legalább egy. Így legalább $2n-3$ tetraédert számolunk. Mivel azonban minden tetraédert négyszer számolhattunk (a négy lapsíkjánál), a tetraéderek száma legalább $\dfrac{2n-3}{4}$, amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzések: 1. Több versenyző „felhasználta”, hogy ha egy tetraédert síkkal metszünk, akkor keletkező darabjainak egyike tetraéder. Ez az állítás nem igaz; ha egy tetraédert olyan síkkal metszünk, mely két kitérő élét elválasztja (de egyiket sem metszi), akkor két „háztető” (ötlapú test) keletkezik (2. ábra).



2. ábra

2. A feladat egyszerűbb változata síkbeli probléma: *ha n egyenes a síkban úgy helyezkedik el, hogy semelyik kettő nem párhuzamos és semelyik három nem halad át egy ponton, akkor az általuk létrehozott síkrészek között legalább $\dfrac{2n-2}{3}$ háromszög van.* Ez az állítás a térbeli feladathoz hasonlóan igazolható.

3. Felvetődik a kérdés, hogy a $\dfrac{2n-3}{4}$ korlát mennyire éles, vagyis nem bizonyítható-e ennél erősebb állítás. Hasonló kérdezhető a 2. pontban említett feladattal kapcsolatban is. Erre a problémára külön cikkben visszatérünk.