David Hilbert (1862–1943) az 1900-ban Párizsban tartott *Nemzetközi Matematikai Kongresszus*on a matematika akkori 23 fontos megoldatlan problémájáról tartott előadást. Ezek a problémák részben még ma is megoldatlanok. A 17. probléma így hangzott: Tegyük fel, hogy egy valós együtthatós, n-változós $f(x_1, \ldots, x_n)$ polinom akármilyen $x_1, \ldots, x_n$ valós számokat behelyettesítve mindig nem negatív értékeket vesz fel. Igaz-e, hogy léteznek olyan $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)$ valós együtthatós racionális törtfüggvények (azaz mindegyik g_i két n-változós valós együtthatós polinom hányadosa), hogy fennáll az

$$f = g_1^2 + \ldots + g_k^2 \tag{1}$$

azonosság. Az (1) alakban előálló f polinomok nyilván csak nemnegatív értékeket vehetnek fel, s a kérdés értelme az, vajon lehet-e egy polinomnak „más oka" arra, hogy mindenütt nemnegatív legyen, mint az, hogy ő (1) alakú.

Emil Artin (1898-), századunk egyik legkiválóbb algebristája 1927-ben megoldotta Hilbert 17. problémáját, bebizonyítva, hogy valóban minden csak nemnegatív értékeket felvevő f polinom (1) alakú.

A figyelmes olvasónak bizonyára feltűnt, hogy Hilbert 17. problémája egy gondolati ugrást tartalmaz. Ha valakinek már eszébe jut a négyzetösszegként való előállíthatóság, első kérdése nyilván a következő: Igaz-e, hogy minden $f(x_1, \ldots, x_n)$, csak nemnegatív értékeket felvevő valós együtthatós polinom előállítható mint $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_r(x_1, \ldots, x_n)$ valós együtthatós *polinomok* négyzetösszege:

$$f = f_1^2 \ldots + f_r^2. \tag{2}$$

Hilbert azonban még 1888-ban bebizonyította, hogy *van* olyan f polinom, amely nem áll elő a (2) alakban. Bizonyítása azonban ilyen f-nek csak a *létezését* mutatja, konkrét példát ilyen f-re nem ad.

Az első egyszerű konkrét példa *T. S. Motzkin*-tól származik, 1967-ből. Az alábbiakban az ő gondolatmenetét követjük. Ajánljuk az olvasónak, hogy az egyes állítások elolvasása után előbb kísérelje meg azokat önállóan bebizonyítani, s csak ha ez már sikerült (vagy ha már valóban hosszabb ideje sikertelenül próbálkozott), olvasson el a bizonyításból egy részt (amíg új ötlethez nem ér), azután ismét próbálja folytatni a bizonyítást.

Bebizonyítjuk, hogy az

$$f(x, y) = x^2y^2(x^2 + y^2 - 3) + 1 \tag{3}$$

polinomnak megvannak a fent említett tulajdonságai.

1. *állítás:*

$$f(x, y) \geq 0 \tag{4}$$

minden x, y valós számpárra.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti ismert összefüggést az

$$x^2, \quad y^2, \quad \frac{1}{x^2y^2}$$

számokra. (Ez csak akkor nem lehetséges, ha $x^2y^2 = 0$, de ekkor $f(x, y) = 1 > 0$). Azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{3}\left(x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}\right) \geq 1,$$

ami átrendezve éppen (4)-et adja.

2. *állítás:* Tegyük fel, hogy valamely

$$F(x, y) = x^2y^2 \cdot P(x, y) + 1$$

(ahol $P(x, y)$ egy 4-nél alacsonyabb fokú valós együtthatós polinom), előáll m valós együtthatós polinom négyzetösszegeként.

Bizonyítás: Legyen

$$F(x, y) = \big(f_1(x, y)\big)^2 + \ldots + \big(f_m(x, y)\big)^2. \tag{5}$$

Helyettesítsük (5)-be $x = 0$-t. Ekkor a bal oldalon 1 áll, tehát a jobb oldalon minden tag konstans kell hogy legyen. Az $x = 0$ helyettesítés után ugyanis mindegyik $f_i(x, y)$ polinomból egy $\varphi_i(y)$ polinom marad vissza, amelyek négyzetösszege a feltevés szerint azonosan 1:

$$\big(\varphi_i(y)\big)^2 + \ldots + \big(\varphi_m(y)\big)^2 = 1. \tag{5a}$$

Ha a φ_i polinomok konstanstól különböző polinomot is tartalmaznának, akkor (5a) bal oldalán a legmagasabb fokú tag együtthatója nem lehetne 0, tehát a bal oldal nem lehetne konstans. Tehát az $f_i(x, y)$ polinomok konstanstól különböző tagjaiban szerepelnie kell x-nek. Ugyanígy kapjuk, hogy mindegyik f_i-ben a konstans tagtól különböző összes tagban szerepelnie kellene y-nak is.

Tehát fennállnak az

$$f_i(x,\, y) = xy \cdot g_i(x,\, y) + c_i \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m) \tag{6}$$

azonosságok alkalmas valós együtthatós $g_i(x,\, y)$ polinomokkal és c_i valós számokkal. A feltétel szerint mindegyik $g_i(x,\, y)$ a 2-nél alacsonyabb fokú. (5)-be visszahelyettesítve:

$$\begin{aligned} F(x,\, y) = x^2y^2\big[\big(g_1(x,\, y)\big)^2 + \ldots + \big(g_m(x,\, y)\big)^2\big] +\\ +2xy\big[c_1g_1(x,\, y) + \ldots + c_mg_m(x,\, y)\big] + (c_1^2 + \ldots + c_m^2). \end{aligned} \tag{7}$$

Ebben az összegben

$$2xy[c_1g_1(x,\, y) + \ldots + c_mg_m(x,\, y)] \tag{8}$$

csak másod- és harmadfokú tagokat tud szolgáltatni, ilyenek pedig $F(x,\, y)$-ban nincsenek. Tehát a (8) polinom azonosan nulla. Így tehát (7) csak úgy állhat fenn, ha

$$c_1^2 + \ldots + c_m^2 = 1$$

és

$$\big(g_1(x,\, y)\big)^2 + \ldots + \big(g_m(x,\, y)\big)^2 = P(x,\, y), \tag{9}$$

de (9) éppen az, amit bizonyítani akarunk.

A 2. állításból speciális esetként adódik, hogy $f(x,\, y)$ nem áll elő négyzetösszegként. Ellenkező esetben ugyanis $x^2 + y^2 - 3$ is előállna négyzetösszegként, holott $x^2 + y^2 - 3$ negatív értékeket is felvesz.

Befejezésül megemlítjük, hogy a (3) alatti példa bizonyos értelemben a lehető legegyszerűbb. Bebizonyítható ugyanis, hogy minden egyváltozós, csupa nemnegatív értékeket felvevő polinom előáll polinomok négyzetösszegeként, [1] és ugyanez igaz a kétváltozós polinomok közül a 6-nál alacsonyabb fokúakra.

Feladatok: 1. Bizonyítsuk be, hogy a 2. állítás nem lenne igaz, ha $P(x,\, y)$-ként 4-edfokú polinomot is megengednénk.

2. Legyen $f(x,\, y)$ legfeljebb harmadfokú polinom.[2] Tekintsük azt a 9 $(x,\, y)$ pontot, amit úgy kapunk, hogy x és y egymástól függetlenül felveszik az 1, 0, -1 értékeket. Tegyük fel, hogy $f(x,\, y)$ értéke e 9 pont közül 8-ban 0. Bizonyítsuk be, hogy a kilencedik pontban is 0 $f(x,\, y)$ értéke.

---

[1] Pontversenyen kívüli problémáink közt szerepel a következő, ide kapcsolódó feladat (P. 175. 46. kötet 174. old.): „Bizonyítsuk be, hogy minden valós együtthatós, nem negatív értékű polinom előállítható két valós együtthatós polinom négyzetösszegeként." E feladat megoldásának közlését márciusi számunkba tervezzük. *Szerkesztőség.*

[2] Választhatjuk pl. a következő jelölést:

$$f(x,\, y) = Ax^3 + By^3 + Cx^2y + Dxy^2 + ax^2 + by^2 + cxy + \alpha x + \beta y + \gamma,$$

ahol $A,\, B,\, \ldots,\, \alpha,\, \beta,\, \gamma$ valós számok. *Szerkesztőség.*