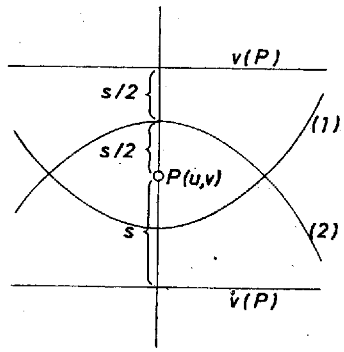
**I. megoldás.** A feladatot koordináta-geometriai módszerrel oldjuk meg. A koordináta-rendszert úgy választjuk meg, hogy az adott parabola egyenlete $y = x^2$ legyen. Ekkor a parabola $d$ vezéregyenesének egyenlete $y = -\frac{1}{4}$. Egy $P(u, v)$ fókuszú, $d$-vel párhuzamos vezéregyenesű parabola egyenlete, amennyiben a vezéregyenes és fókusz távolsága $s$, vagy

$$y = \frac{1}{2s}(x-u)^2 + v - \frac{s}{2}, \tag{1}$$

vagy pedig

$$y = -\frac{1}{2s}(x-u)^2 + v + \frac{s}{2}, \tag{2}$$

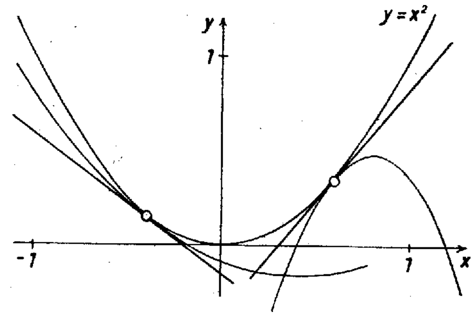
aszerint, hogy a parabola fókusza a vezéregyenes „felett” vagy „alatt” helyezkedik el (1. ábra).




*1. ábra*

Vizsgáljuk meg, hogy mely $P(u,\, v)$ pontok esetén fogja az (1) parabola érinteni az $y = x^2$ parabolát.

Két görbe akkor érinti egymást, ha van közös pontjuk, és a két görbéhez abban a pontban húzott érintők egybeesnek (2. ábra).




*2. ábra*

Ha a két parabola érinti egymást az $x$ abszcisszájú pontban, akkor az abban a pontban húzott érintők iránytangenseinek meg kell egyeznie. És fordítva: ha ezek megegyeznek, akkor a két görbe érinti egymást.

Az $y = x^2$ görbéhez az $x$ abszcisszájú pontban húzott érintő iránytangense $y' = 2x$; az (1) görbéhez húzott érintő iránytangense $y' = \frac{1}{s}(x - u)$. Ennek a két értéknek kell megegyeznie:

$$2x = \frac{1}{s}\,(x-u),$$

$$(1-2s)x = u. \tag{3}$$

Ha már most $2s \neq 1$, akkor ebből $x = u/(1-2s)$, azaz csak az ilyen abszcisszájú pontban érintheti egymást a két parabola. Ha viszont az $x = u/(1-2s)$ pontban a paraboláknak közös pontja van, akkor ott érintik is egymást. Tehát $(2s-1) \neq 0$ esetén a két parabola csak akkor érinti egymást, ha

$$\left(\frac{u}{1-2s}\right)^2 = \frac{1}{2s}\left(\frac{u}{1-2s} - u\right)^2 + v - \frac{s}{2},$$

azaz ha $u$ és $v$ között a

$$v=\frac{1}{1-2s}\cdot u^2+\frac{s}{2} \tag{4}$$

összefüggés áll fenn.

Ha viszont $2s=1$, akkor (3) csak úgy állhat fenn, ha $u=0$, ekkor viszont az (1) parabolaegyenlet $y=x^2+v-\dfrac{1}{4}$ alakú lesz. Így $2s-1=0$ esetén az (1) parabola, valamint az $y=x^2$ parabola $v\neq\dfrac{1}{4}$ mellett nem érinti egymást, $v=\dfrac{1}{4}$ mellet pedig azonosak; innen nem kapunk megoldást.

Hasonlóan azt vizsgálva, hogy a (2) parabola és az $y=x^2$ parabola mikor érinti egymást, a $2x=-\dfrac{1}{s}(x-u)$-ból az $x=u/(2s+1)$ abszcisszájú pontban lehet csak érintés, és ez $2s+1\geq 1$ miatt mindig értelmes. Így a (2) parabola és az $y=x^2$ parabola csak akkor érinti egymást, ha

$$\left(\frac{u}{2s+1}\right)^2=-\frac{1}{2s}\left(\frac{u}{2s+1}-u\right)^2+v+\frac{s}{2},$$

vagyis ha

$$v=\frac{1}{1+2s}\cdot u^2-\frac{s}{2} \tag{5}$$

Összefoglalva, a $P(u,\,v)$ ponthoz akkor és csak akkor találunk a feladatban előírt tulajdonságú parabolát, ha (5) teljesül, vagy ha $2s-1\neq 0$ és (4) teljesül. Így a keresett mértani hely $2s-1\neq 0$ esetén az

$$y=\frac{1}{1+2s}\cdot x^2-\frac{s}{2}, \tag{5'}$$

és az

$$y=\frac{1}{1-2s}\cdot x^2+\frac{s}{2} \tag{4'}$$

egyenletek valamelyikét kielégítő pontok (két parabola), míg $2s-1=0$ esetén csak az

$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{4} \tag{5''}$$

egyenletet kielégítő pontok (egy parabola).

Megvizsgáljuk, hogyan származnak a kapott parabolák az $y=x^2$ parabolából és az adott $s$ szakaszból. Az adott parabola csúcsa a $(0;\,0)$ pont, fókusza $F\left(0;\,\dfrac{1}{4}\right)$, vezéregyenese – mint már mondtuk – az $y=-\dfrac{1}{4}$ egyenes; a $(4')$ parabola csúcsa $\left(0;\,\dfrac{s}{2}\right)$ – ahol $s\neq\dfrac{1}{2}$ –, paraméternek fele

$$\frac{1}{4}\left|\frac{1}{\dfrac{1}{1-2s}}\right|=\left|\frac{1}{4}-\frac{s}{2}\right|.$$

Mármost, ha $0<2s<1$, akkor $(4')$ fókuszának ordinátája: $\dfrac{s}{2}+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{s}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$, vagyis e fókusz azonos $F$-fel; vezéregyenese pedig az

$$y=\frac{s}{2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{s}{2}\right)=-\frac{1}{4}+s$$

egyenes, a kiindulási parabola vezéregyenesének eltoltja $s$-sel (fölfelé). Mivel ekkor még $s<1/2$, azért a föltolt vezéregyenes még alatta van $F$-nek, fölfelé nyílik a parabola.

Ha viszont $2s>1$, azaz $s/2>1/4$, akkor $(4')$ csúcsa az $F$ fölött van (egyszersmind $x^2$ együtthatója negatív), a parabola lefelé nyílik, fókusza lejjebb van, mint a csúcs. E fókusz ordinátája

$$\frac{s}{2}-\left|\frac{1}{4}-\frac{s}{2}\right|=\frac{s}{2}-\left(\frac{s}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4},$$

tehát ekkor is azonos $F$-fel, vezéregyenese $y = -\frac{1}{4} + s$, ekkor is $s$-sel van föltolva. (De ekkor túl van tolva az $F$-en.) A kizárt $2s = 1$ eset pedig azt jelentené, hogy az $y = x^2$ parabola vezéregyenesét rátolnánk a fókuszára; emiatt nem keletkezik ilyenkor $P$ mértani helye az (1) alakból.

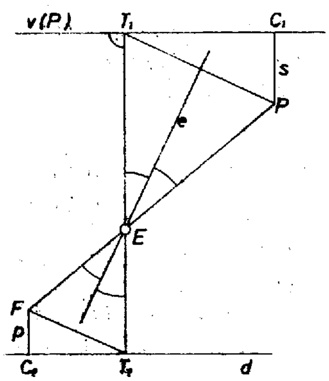
Hasonlóan látható – de egyszerűbben –, hogy ($5'$) csúcsa minden pozitív $s$-re a $(0; -s/2)$ pont, fókusza $F$, vezéregyenese $y = -1/4 - s$, vagyis lefelé van eltolva $s$-sel.

**II. megoldás.** A feladatot koordináta-rendszer alkalmazása nélkül is megoldjuk. A megoldásban felhasználjuk azt a tényt, hogy a parabola érintője felezi az érintési pontot a fókusszal összekötő egyenes, valamint az érintési pontból a vezéregyenesre emelt merőleges szögét.

Legyen az adott parabola fókusza $F$, a fókusz és a $d$ vezéregyenes közti távolság $p$. Tegyük fel, hogy a $P$ fókuszú, $v$ vezéregyenesű parabola a megadott parabolát az $E$ pontban érinti, azaz a két parabolához $E$ pontban közös, $e$ érintő húzható. Mivel a feltétel szerint $v$ és $d$ párhuzamos, ezért az $E$ pontból $v$-re, illetve $d$-re bocsátott merőlegesek $T_1$, illetve $T_2$ talppontjai és az $E$ pont egy egyenesen vannak.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a $T_1T_2$ szakasz belsejében tartalmazza az $E$ pontot vagy sem.

I. Ha $E$ a $T_1T_2$ szakasz belső pontja, akkor $F$ és $P$ az $e$ egyenes különböző oldalára esik, azaz $FP = FE + EP$. A $PT_1C_1$ és az $FT_2C_2$ háromszögek (lásd a 3. ábrát) hasonlóak, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak.




*3. ábra*

Hasonlóságuk aránya $PC_1 : FC_2 = s : p$. Hasonlók a $PET_1$, valamint $FET_2$ háromszögek is, hasonlóságuk aránya $PT_1 : FT_2 = s : p$, azaz $EP : FE = s : p$, ahonnan

$$\frac{FP}{FE} = \frac{FE + EP}{FE} = 1 + \frac{EP}{FE} = 1 + \frac{s}{p}.$$

Így a $P$ pontot az $E$ pontból $F$ középpontú, $\left(1 + \frac{s}{p}\right)$ arányú nagyítással kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a keresett tulajdonságú $P$ pontok rajta vannak az eredeti parabola $F$ középpontú, $\left(1 + \frac{s}{p}\right)$ arányú nagyítottján.

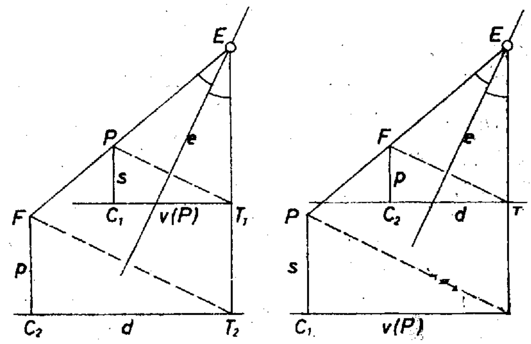
Megmutatjuk, hogy ennek a parabolának összes pontja rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy egy alkalmas parabolának fókusza.

Legyen ugyanis $P$ a nyújtott parabola egy pontja. Mivel $P$ az eredeti parabola egy $E$ pontjának képe, azért $FP : FE = 1 + \frac{s}{p}$ és $F$, $E$, $P$ ilyen sorrendben vannak az egyenesen, tehát $EP : EF = s : p$.

Legyen továbbá $E$ merőleges vetülete $d$-re $T_2$, $F$ merőleges vetülete $C_2$ és tükrözzük $E$-re az $FC_2T_2$ háromszöget, majd nyújtsuk meg $s/p$-szeresére. Az $F$ pont ekkor a $P$ pontba fog átmenni, a $T_2$, illetve $C_2$ pontok pedig $T_1$, illetve $C_1$ pontokba. $T_1C_1$ párhuzamos lesz $T_2C_2$-vel, hiszen a tükrözés és hasonlóság párhuzamosságtartó, továbbá $EP = ET_1$, hiszen ez az egyenlő szárú $FET_2$ háromszög tükrözöttje, illetve nagyítottja. $PC_1 = \frac{s}{p} \cdot FC_2 = \frac{s}{p} \cdot p = s$, vagyis az $E$ pont rajta van a $P$ fókuszú, $T_1C_1$ vezéregyenesű parabolán, és $P$, valamint $T_1C_1$ távolsága éppen $s$. Másrészt $F$, $E$, $P$, valamint $T_2$, $E$, $T_1$ egy egyenesre esnek, azért mind a két parabolához az $E$ pontban húzott érintő ugyanaz, az $FET_2$ szög vagy a $PET_1$ szög szögfelezője.

Így beláttuk, hogy a feladatbeli mértani hely – abban az esetben, ha $T_1T_2$ szakasznak az $E$ pont belső pontja – a megadott parabolának $F$ középpontú, $1 + s/p$ arányú nagyítottja.

II. Ez az eset hasonló az előzőhöz, azért itt csak utalunk az egyes lépésekre (4. ábra).




*4. ábra*

Az $F$, valamint $P$ pontok az $e$ egyenesnek ugyanarra a partjára esnek, így irányított szakaszokat nézve $FP = FE - PE$. A $PT_1C_1$, valamint az $FT_2C_2$ háromszögek, majd a $PET_1$ és $FET_2$ háromszögek hasonlóságából $PE : FE = s : p$, ahonnan

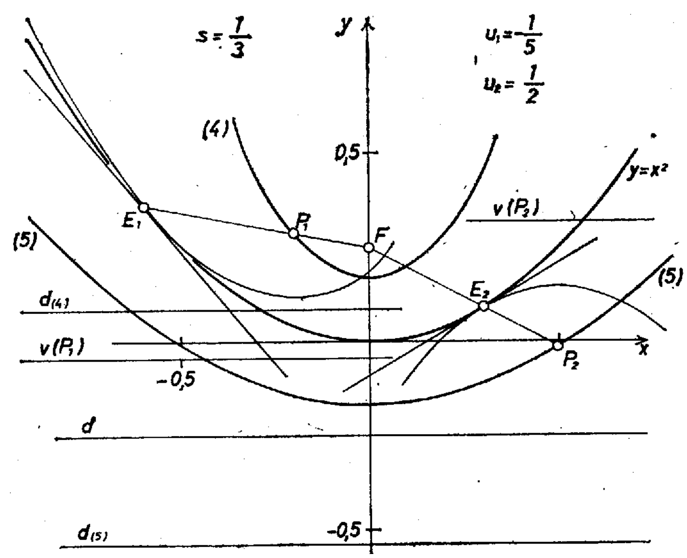
$$\frac{FP}{FE} = \frac{FE - PE}{FE} = 1 - \frac{s}{p}$$

pozitív arány esetén, ez egy $F$ középpontú, adott arányú hasonlósági transzformációt jelent, ha negatív, akkor még egy $F$ pontra vonatkozó tükrözést is. Amennyiben az arány nulla, úgy azt kapjuk, hogy a két parabola fókusza, vezéregyenese egybeesik, tehát a két parabola is egybeesik, ekkor viszont nem érintik egymást.

Így a második esetben a mértani hely $s \neq p$ esetén az adott parabola $F$ középpontú, $\left(1 - \dfrac{s}{p}\right)$ arányú nagyítottja. Most is az előzőekhez hasonlóan meg lehet mutatni, hogy ennek a megnyújtott parabolának minden pontja eleme a mértani helynek. $s = p$ esetben pedig megfelelő pont nincs.

Összefoglalva: ha $s \neq p$, akkor a keresett mértani hely a megadott parabola $F$ középpontú, $1 + s/p$, illetve $1 - s/p$ arányú nagyítottjainak uniója. Ha $s = p$, akkor az eredeti parabola $F$ középpontú, 2-szeres nagyítottja.

*Kovács István* (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)




*5. ábra*

Az 5. ábra az $s = 1/3$ értékhez tartozó parabolapárt tünteti fel (vastagon rajzolva), továbbá az első parabolán a $-1/5$ abszcisszájú $P_1$, a másodikon az $1/2$ abszcisszájú $P_2$ ponthoz tartozó kívánt $v(P_1)$, $v(P_2)$ vezéregyenest, végül az ezekből kapott, az $y = x^2$ parabolát érintő parabolákat (vékonyan rajzolva).