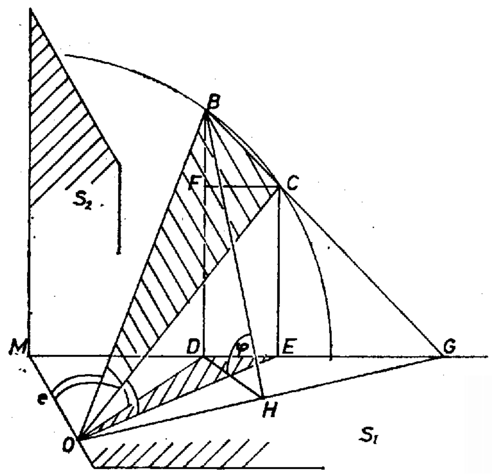
I. megoldás. Tekintsük az O csúcsú, e tengelyű, $60°$-os fél nyílásszögű egyenes körkúpot. A feltétel szerint mindkét egyenes illeszkedik a kúp palástjára. Válasszuk meg a kúp alkotóját egységnyinek, valamint legyen az S_1 síkkal $45°$-os szöget bezáró egyenes OB, a $30°$-os szöget bezáró egyenes OC, ahol OB, valamint OC a kúp alkotói. Az egyenes körkúp alapjának középpontja legyen M. Vetítsük a B és C pontokat merőlegesen az S_1 síkra, a vetületek legyenek D, illetve E.



1. ábra

Feladatunk az OBC, valamint ODE háromszögek síkjai szögét meghatározni. De az ODE háromszög merőleges vetülete az OBC háromszögnek, így területe éppen az OBC háromszög területe szorozva a két sík hajlásszögének koszinuszával, azaz φ-vel jelölve a keresett szöget:

$$\cos\varphi = \frac{T_{ODE}}{T_{OBC}}. \tag{1}$$

Mivel az alkotó egységnyi hosszú, az OBM, OBD és OCD derékszögű háromszögekben a befogók hosszát könnyen meghatározhatjuk:

$$OM = \cos 60° = \frac{1}{2}, \quad BD = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad CE = \sin 30° = \frac{1}{2}$$

valamint

$$OD = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad OE = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Az OBC és ODE háromszögek két-két oldalát ismerjük, a harmadik oldalt a fenti adatokból már számíthatjuk. Először DE-t határozzuk meg:

$$ME = \sqrt{OE^2 - MO^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad MD = \sqrt{OD^2 - OM^2} = \frac{1}{2},$$

$$DE = ME - MD = \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Így

$$T_{ODE} = \frac{1}{2}\cdot DE \cdot OM = \frac{1}{8}\big(\sqrt{2}-1\big).$$

BC meghatározásához vetítsük merőlegesen C-t BD-re. A vetületet jelölje F.

$$CF = ED = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \quad BF = BD - FD = BD - CE = \frac{\sqrt{2}-1}{2} = CF.$$

Azt kaptuk, hogy BFC egyenlő szárú derékszögű háromszög, tehát

$$BC = \sqrt{2}CF = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Az OBC egyenlő szárú háromszög magassága $\sqrt{OB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}{4}$, és így

$$T_{OBC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}{4} = \frac{1}{8}\big(\sqrt{2}-1\big)\cdot\sqrt{5+2\sqrt{2}}.$$

Végül (1)-ből:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{8}(\sqrt{2}-1)}{\frac{1}{8}(\sqrt{2}-1)\sqrt{5+2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{2}}} = 0{,}357,$$

ahonnan φ-re $69°4'$-et kapunk.

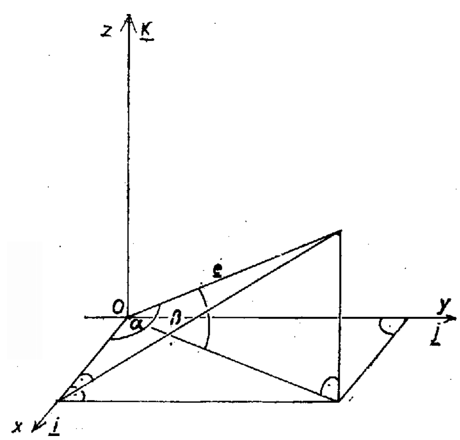
Megjegyzés. Jelöljük a BC, DE egyenesek metszéspontját G-vel. A BDG háromszög hasonló a BFC háromszöghöz, és ez az utóbbi egyenlő szárú, emiatt $DG = DB = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tehát az ODG háromszög is egyenlő szárú, jelöljük az alapjának a felezőpontját H-val. Könnyen látható, hogy a BDH háromszög H-nál levő szöge egyenlő a keresett φ szöggel. Mivel $OG^2 = \frac{1}{4} + \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{4} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$,

$$DH^2 = OD^2 - OH^2 = \frac{1}{2} - \frac{2+\sqrt{2}}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{8},$$

és így

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{2-\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 2{,}613, \quad \varphi = 69°4'.$$

II. megoldás. Vegyünk fel egy koordináta-rendszert úgy, hogy az O pont legyen a koordináta-rendszer origója, az e félegyenes az X tengely pozitív ága, az X és Y tengelyek síkja pedig az S_1 sík.



2. ábra

Ha az e egységvektor az X tengellyel α szöget, az XY tengelysíkkal β szöget zár be, akkor az e vektor tengelyirányú összetevői az ábra szerint

$$(2) \qquad \left(\cos\alpha,\ \varepsilon\sqrt{1-\cos^2\alpha-\sin^2\beta},\ \sin\beta\right).$$

Itt ε-t $+1$-nek vagy -1-nek kell megválasztanunk aszerint, hogy az e vektor az S_2 sík melyik partjára esik. Ezek szerint, ha a feladatbeli két félegyenes irányvektora $\mathbf{a}$, illetve $\mathbf{b}$, akkor (2) szerint

$$\mathbf{a} = i\,\cos 60° + j\varepsilon\sqrt{1-\cos^2 60° - \sin^2 45°} + k\cdot\sin 45° = \frac{1}{2}i + \frac{\varepsilon}{2}j + \frac{\sqrt{2}}{2}k.$$

$$\mathbf{b} = i\,\cos 60° + j\varepsilon\cdot\sqrt{1-\cos^2 60° - \sin^2 30°} + k\sin 30° = \frac{1}{2}i + \varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}j + \frac{1}{2}k.$$

Itt mindkét helyen ε-t ugyanannak kell megválasztanunk, mivel a két félegyenes ugyanabba a térnegyedbe esik. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített sík normálvektora

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\frac{\varepsilon}{4}i + \frac{\sqrt{2}-1}{4}j + \varepsilon\frac{\sqrt{2}-1}{4}k.$$

Az S_1 sík normálvektora éppen $\mathbf{k}$. A kérdezett sík és S_1 hajlásszöge megegyezik normálvektoraik hajlásszögével. A hajlásszög koszinuszát a skaláris szorzat definíciója alapján kaphatjuk meg:

$$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}| = |\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \text{ből}\ \cos(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$$

azaz

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(-\frac{\varepsilon}{4}i + \frac{\sqrt{2}-1}{4}j + \varepsilon\frac{\sqrt{2}-1}{4}k\right)\cdot k\right|}{\left|-\frac{\varepsilon}{4}i + \frac{\sqrt{2}-1}{4}j + \varepsilon\frac{\sqrt{2}-1}{4}k\right|\cdot 1} =$$

$$= \frac{|\varepsilon|\left|\sqrt{2}-1\right|}{\sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{7-4\sqrt{2}}} = 0{,}357,$$

amiből $\varphi = 69°4'$.