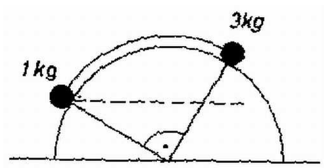
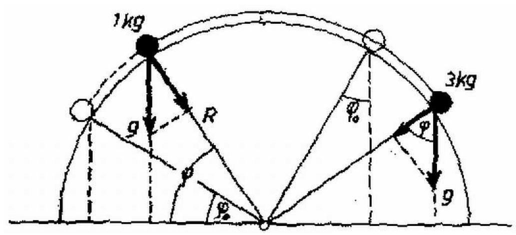
Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat október 21-én rendezte ez évi fizikai versenyét Budapesten és 7 vidéki városban az idén érettségizettek és középiskolai tanulók számára, A versenyzők 5 óráig dolgozhattak és bármilyen segédeszközt használhattak. A versenyzők létszáma 309 volt. Ismertetjük a feladatokat és megoldásukat.

1. *Egy félhengerre olyan hosszú fonalat fektetünk, amelyhez tartozó középponti szög $90°$-os (1. ábra). A felszínhez feszülő fonál egyik végén 1 kg-os, másik végén 3 kg-os tömeg van. A fonalat úgy helyezzük el, hogy az 1 kg-os tömeg a félhenger fele magasságában legyen. Ezután elengedjük a fonalat. Melyik tömeg repül le előbb, a hengerről? A súrlódást nem vesszük figyelembe.*



1. ábra

Megoldás. Határozza meg a tömegek helyzetét φ szög (2. ábra).



2. ábra

Az indulási helyzetet meghatározó szög φ_0. Csak jobbra történő mozgással foglalkozunk. Legyen a két tömeg m, ill. $3m$.

A fonállal összekötött tömegek egyensúlya olyan φ_i szögnél valósul meg, amelyre a jobb oldali tömeg súlyának forgatónyomatéka egyenlő a bal oldali tömeg súlyának forgatónyomatékával.

$$R\ \sin\ \varphi_i \cdot 3mg = R\ \cos\ \varphi_i \cdot mg,$$

innen tg $\varphi_i = 1/3$, $\varphi_i = 18,43°$. Tehát feladatunk $\varphi_0 = 30°$-os adata mellett a tömegek elindulnak jobb felé.

Mozgás közben, egy bizonyos φ-hez tartozó helyzetben a tömegek közös sebessége v. Az energiatörvény szerint a jobb oldali tömeg munkavégzése egyenlő a bal oldali tömeg helyzeti energiájának növekedésével, hozzáadva az egész szerkezet mozgási energiáját:

$$3mgR(\cos\ \varphi_0 - \cos\ \varphi) = mgR(\sin\ \varphi - \sin\ \varphi_0) + \frac{4mv^2}{2}.$$

Innen kifejezzük φ függvényeként v sebességet, illetve $v^2/R = a_c$ centripetális gyorsulást:

(I.) $$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{g}{2}\big[(3\ \cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0) - (3\ \cos\ \varphi + \sin\ \varphi)\big].$$

Ez a centripetális gyorsulás 0-tól $g\big[(3\ \cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0) - 1\big]/2$-ig monoton növekszik, ha φ-t φ_0- tól $90°$-ig változtatjuk.

A bal oldali m tömeget $mg\ \sin\ \varphi$ erő szorítja a hengerhez. Az elrepülés feltétele, hogy ma_c centripetális erő elérje ezt az értéket, vagyis, a gyorsulásokkal kifejezve:

(II.) $$a_c = \frac{v^2}{R} = g\ \sin\ \varphi_r.$$

A bal oldali tömeg elrepülésének φ_r szögét kiszámíthatjuk, ha (II.)-ben felhasználjuk a_c (I.)-szerinti értékét:

$$\sin\ \varphi_r = \frac{1}{2}\big[(3\ \cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0) - (3\ \cos\ \varphi_r +\ sin\ \varphi_r)\big].$$

A $\cos\ \varphi_r = \sqrt{1 - \sin^2\ \varphi_r}$ összefüggést felhasználva és rendezve:

$18\ \sin^2\varphi_r - 6(3\ \cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0)\ \sin\ \varphi_r + (3\ \cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0)^2 - 9 = 0$. Ennek megoldása:

$$\sin\ \varphi_r = \frac{3\ \cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0 + \sqrt{18 - (3\ \cos\ \varphi_0 +\ \sin\ \ \varphi_0)^2}}{6}$$

A mi $\varphi_0 = 30°$-os indításunk esetében $\varphi_r = 87,85°$, tehát az ehhez tartozó helyzetben repülne le a bal oldali tömeg.

A jobb oldali tömegre vonatkozó számítást hasonlóan végezzük el. A tömeg $3ma_c$ centripetális gyorsulásának a $3mg$ súlyerő $3mg\cos\ \varphi$ összetevőjét kell elérnie, ezért most az elrepülés feltétele:

(III.)
$$a_c = \frac{v^2}{R} = g\ \cos\ \varphi_r.$$

A jobb oldali $3m$ tömeg elrepüléséhez tartozó φ_r szöget iszámíthatjuk, ha (III.)-ban felhasználjuk a_c (I.) szerinti értékét:

$$\cos\ \varphi_r = \frac{1}{2}\big[(3\ \cos\ \varphi_0 +\ \sin\ \varphi_0) - (3\ \cos\ \varphi_r + \sin\ \varphi_r)\big].$$

Ismét használjuk a $\cos\ \varphi_r = \sqrt{1 - \sin^2\ \varphi_r}$ összefüggést és rendezzük az egyenletet:

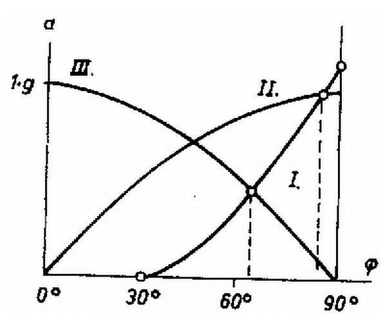
$$26\ \sin^2\ \varphi_r - 2(3\ \cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0)\sin\ \varphi_r + (3\ \cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0)^2 - 25 = 0.$$

Az egyenlet megoldása:

$$\sin\ \varphi_r = \frac{3\ \cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0 + \sqrt{650 - 25(3\ \cos\ \varphi_0 + \sin\ \varphi_0)^2}}{26}.$$

A mi esetünkben $\varphi_0 = 30°$ indítási szög mellett a jobb oldali tömeg elrepülési helyzetét meghatározó szög $\varphi_r = 63,9°$. Tehát a jobb oldali tömeg előbb repül le a hengerről.

Jó áttekintést nyújt a 3. ábra.

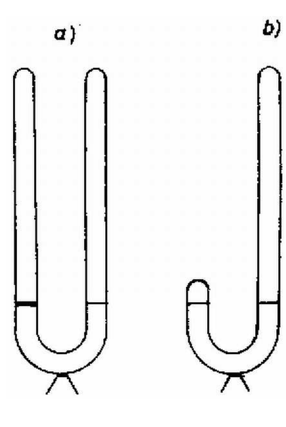


3. ábra

A II. görbe feltünteti φ függvényében a bal oldali tömeget a hengerhez szorító erőnek megfelelő gyorsulást (sinus-görbe), a III. görbe pedig ugyanezt a jobb oldali tömegnél (cosinus-görbe). Az I. görbe a tömegek közös centripetális gyorsulását mutatja φ függvényében, $\varphi_0 = 30°$-os indítás esetében. A metszéspontok jelentik a lerepülési helyzetet. Látjuk, hogy a jobb oldali tömegnek feltétlenül le kell repülnie valamilyen φ szögnél. mert az I.-görbe feltétlenül metszi a III.-cosinus-görbét. A II.-görbén nem kapunk feltétlenül metszéspontot. Meghatározható, hogy $\varphi = 36,87°$-os indításnál éri el I. Az $1g$ értéket, tehát ennél magasabb indításnál a bal oldali tömeg nem repülhet le.

Ha a mozgás elemzése nélkül csak a feladat feltett kérdésére akarunk válaszolni, akkor legegyszerűbben így járhatunk el. A tömegek sebessége és centripetális gyorsulása egyenlő. Ha a bal oldali tömeg a $\varphi = 45°$-os helyzetig még nem repült le, akkor ezután a jobb oldali tömegnek kell előbb lerepülnie, mert ekkor már a sinus kisebb, mint a cosinus. Arról egyszerű számítással gyorsan meg lehet győződni, hogy a 45°-os helyzetig a bal oldali tömeg még nem repül le.

2. a) *Hosszú szárú U-alakú csőben szobahőmérsékletű víz van (4. ábra).*



4. ábra

A bal oldali szárban a víz felszínét párolgásmentes olajhártya zárja el. A berendezést súlypontja alatt megtámasztjuk, majd egyenletesen felmelegítjük. Felborul-e?

b) *Mi történik melegítéskor az előzőleg kiegyensúlyozott berendezéssel akkor, ha nincs olajhártya, de a bal oldali szár sokkal rövidebb?*

Megoldás. a) A jobboldali csőben növekszik a folyadék felett a telített gőzök nyomása (a tenzió) és vizet nyom át a bal oldali szárba. Az ék fölötti keresztmetszetben anyag vándorolt bal felé, és ennek az ilyen alakú eszközben az a következménye, hogy a berendezés felső végével bal felé billen.

b) A melegítés után is egyenlők a tenziók, tehát a két szárban most is egyenlő magasan áll a víz (bár a mostani szint valamivel alacsonyabb, mint az előbbi, mert folyadéknak el kellett párolognia). A hosszabb jobb oldali szárba több gőznek kellett belepárolognia, mint a rövidebb baloldaliba, a jobb oldal nehezebb lett, aminek az a következménye (az egyenlő erőkarok mellett), hogy a szerkezet felső végével jobbra billen.

Megjegyzések. b) esetben a gőz viszonylag kis sűrűsége folytán nem túl nagy a keletkező súlykülönbség. Érdekes még, hogy gőzök nyomása és sűrűsége a felszíntől felfelé menve kissé csökken a magasságkülönbség folytán, amint az a légkörben ismeretes (hipszometriás nyomás- és sűrűségcsökkenés). Tehát a tér csak közvetlenül a felszín mellett telített, feljebb már nem. A kétoldali folyadékszintek magasságára nézve a felszín melletti nyomás a lényeges, és így a szintmagasságok egyenlők maradnak annak ellenére, hogy nagyobb tömegű gőz van a jobb oldali felszín felett. De ezek fent, belülről kisebb erővel nyomják a cső tetejét, mint a bal oldali rövidebb csőben.

Ha eredetileg levegő is lett volna a csövekben, vagy melegítéskor túllépnénk a kritikus hőmérsékletet, az egyensúly-megbomlás előjele ugyanolyan marad.

3. *Felfújt, könnyű műanyag labdát találomra megpörgetve sima vízfelületre ejtünk. Azt tapasztaljuk, hogy mielőtt megáll, rendszerint függőleges tengely körül forog. Mi a jelenség magyarázata?*

Megoldás. A ferde helyzetű tengely körüli forgás vízszintes és függőleges tengely körüli forgás eredőjeként fogható fel. A vízszintes tengely körüli forgást a súrlódás erősen fékezi, mert a kerület, a gömb „egyenlítője” mentén nagy a sebesség. A függőleges tengely körüli forgással az érintkező felület kis sebessége jár együtt a gömb kis gömbsüvegénél, tehát ez a forgás lassabban fékeződik, tovább marad meg, a forgás végén már csak ez érvényesül.

A verseny eredménye. I. díjat nyert *Szabó Zoltán* honvéd (a budapesti Apáczai Csere Gimnáziumban érettségizett mint Turtóczky Sándor tanítványa); II. díjat nyert *Németh Tibor*, a budapesti Berzsenyi Gimnázium III. osztályában Hubert Györgyné tanítványa; egyenlő helyezésben III. díjat nyertek *Bezdek Károly*, a dunaújvárosi Münnich Gimnázium IV. o. tanulója (tanára Kobzos Ferenc), *Tóth Péter*, a budapesti Eötvös Gimnázium IV. o. tanulója (tanára Veres Mihályné) és *Vassel Róbert*, a budapesti ELTE-TTK matematikus hallgatója (a budapesti I. István Gimnáziumban érettségizett mint Moór Ágnes tanítványa). Dicséretet kaptak könyvjutalommal *Nagy Péter* honvéd (a budapesti Petőfi Gimnáziumban érettségizett mint Biró István tanítványa), *Tarjányi László*, a kecskeméti Katona Gimnázium IV. o. t. (tanára Fodor István) és *Veress Tibor*, a budapesti Radnóti Gimnázium IV. o. t. (tanára, Kugler Sándorné).