

Szorozzuk (1)-et $(n+1)^2$ -nel:

$$(n+1)^2 c_{n+1} = n^2 c_n + 6n.$$

Eszerint a c_n sorozat alapján a természetes számokon értelmezett

$$(2) \quad f(n) = n^2 c_n$$

függvényre

$$(3) \quad f(n+1) - f(n) = 6n$$

teljesül. (3) megadja az f függvénynek a szomszédos természetes számokhoz tartozó növekményeit, vagyis azokat az értékeket, amelyekkel a függvény értéke megnövekszik, ha egy természetes számról áttérünk az 1-gyel nagyobbra. Mivel az 1-ből kiindulva lépésről lépésre bármely természetes számhoz eljuthatunk, $f(n)$ értékét megkapjuk, ha az $f(1) = 0$ függvényértékhez hozzáadjuk az 1 és n helyek között fellépő növekmények összegét:

$$\begin{aligned} f(n) &= f(1) + [f(2) - f(1)] + [f(3) - f(2)] + \dots + f[(n) - f(n-1)] = \\ &= 0 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + \dots + 6(n-1) = 6 \frac{n(n-1)}{2} = 3n(n-1). \end{aligned}$$

Ebből (2) alapján

$$c_n = \frac{f(n)}{n^2} = 3 - \frac{3}{n}$$

következik. Legyen mármost ε tetszés szerinti pozitív szám, ekkor a konvergencia ismert

$$|c_n - 3| = \frac{3}{n} < \varepsilon$$

követelménye teljesül minden olyan n indexre, amelyre

$$n > \left[\frac{3}{\varepsilon} \right],$$

ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.