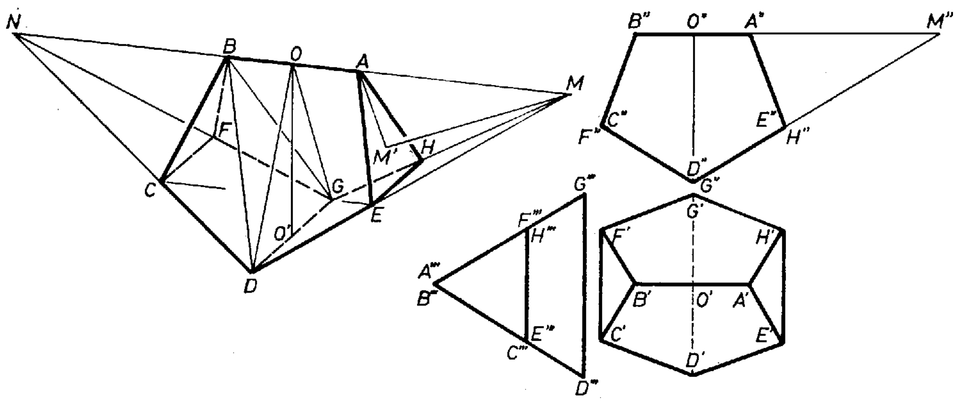
A két ötszöglap az AB él körül egymásba fordítható. Ezért egyrészt egymás tükörképei a síkjaik közti szög felező-síkjára. Így az EH, CF élek és a DG egyenes merőlegesek e síkra, párhuzamosak egymással, és így a test két hátralevő lapja a konvexség alapján a $DGHE$ és a $DGFC$ trapéz, hiszen DG távolabb van AB-től, mint CF és EH.



Az ötszöglapok egymásba fordításából az is következik, hogy a DE egyenesnek az AB forgástengelyen levő M metszéspontján átmegy DE-nek elfordított helyzete, a GH egyenes is, és M-re az ötszög szimmetriái alapján $MH = MA = ME = CE$, az ötszög átlója – aminek hossza, mint ismeretes, $2\cos 36^\circ = = (\sqrt{5}+1)/2$, hosszúságegységnek AB-t véve –, és ugyanígy a DC, GF élpár N metszéspontjára $NC = NF = NB = CE$.

Ezek szerint a kérdéses test előállítható az $MNDG$ tetraéderből a $MAEH$, $NBCF$ tetraéderek lemetszésével. És mivel másrészt felépítésénél fogva a test az AB él felező merőleges síkjára is szimmetrikus, azért térfogata 2-szer akkora, mint az $MODG$ és $MAEH$ tetraéderek térfogatának különbsége, ahol O az AB él felezőpontja.

Vegyük észre még, hogy mivel BD párhuzamos AE-val, azért a BDG sík párhuzamos AEH-val, így BDG is egyenlő oldalú háromszög mint AEH-nak az M centrumból nagyított képe, tehát $DB = BG = AC$, és a test két trapézlapja egybevágó az $ABCE$ trapézzal.

Eszerint a test f felszínét megadja az $ABCE$ idom területének 4-szereséből és a CDE, AEH háromszögek területének 2-szereséből adódó összeg. A trapéznak, valamint a CDE háromszögnek a CD alapra merőleges magassága $\sin 72^\circ = \sqrt{10+2\sqrt{5}}/4$, így

$$f = 4\cdot\frac{1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{2}\sin 72^\circ + 2\cdot\frac{1}{2}\sin 72^\circ + 2\frac{\sqrt{3}}{4} =$$
$$= \frac{4+\sqrt{5}}{4}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 6{,}797 \text{ területegység.}$$

Az ODG egyenlő szárú háromszögben

$$OD = \sqrt{BD^2 - BO^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

így az O-ból húzott magasság:

$$OO' = \sqrt{OD^2 - \frac{DG^2}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+3}{4}.$$

Az $MODG$ tetraédernek az ODG lapra merőleges magassága:

$$MO = MA + AO = \frac{\sqrt{5}+2}{2},$$

tehát ez a térfogat:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+3}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{2} = \frac{9+4\sqrt{5}}{24}.$$

Az AEH háromszög köré írható kör sugara $AM' = 1/\sqrt{3}$, így az $MAEH$ gúla M-ból húzott magassága:

$$MM' = \sqrt{CE^2 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{12}} = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{3}},$$

tehát térfogata:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+3}{24}.$$

Végül a vizsgált test térfogata a mondottak alapján

$$V = \frac{2+\sqrt{5}}{4} = 1{,}059 \text{ térfogategység.}$$

Turán György (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn.)

Megjegyzések. **1.** A test térfogatát más felbontásból is számíthatjuk, pl. az FCE sík – amely H-n is átmegy – két ferdén lemetszett háromoldalú hasábra darabolja a testet (oldaléleik iránya CE, ill. CF).

2. Hasonlóan a $DGAHE$ és $DGBFC$ csonkahasábokra és a $DGAB$ gúlára bontva a testet, e három rész mindegyikének térfogata $V/3$.