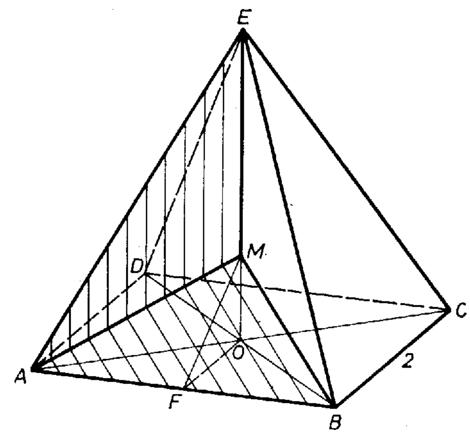
I. megoldás. Válasszuk hosszúságegységnek az alapél felét, legyen a gúla magassága $OE = m$ (az adott $AE : AB = 2$ aránytól egyelőre eltekintve) és $OM = x$ (> 0).



1. ábra

Így, az AB él felezőpontját F-fel jelölve $FM = \sqrt{x^2+1}$, másrészt $AO = \sqrt{2}$, és a vizsgálandó területösszeg (1. ábra)

$$t\,(x) = AF \cdot FM + \frac{1}{2} ME \cdot AO = \sqrt{x^2+1} + \frac{m-x}{\sqrt{2}},$$

ha $0 < x \leq m$. Ennek deriváltja

$$t\,'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1+1}},$$

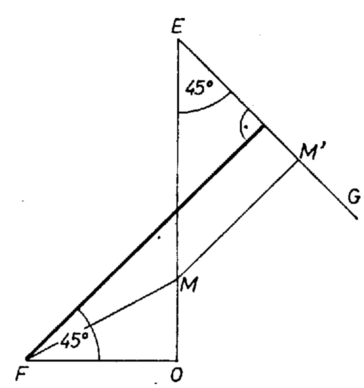
és ez csak akkor tűnik el, ha $\dfrac{1}{x^2} = 1$, $x = 1$, csak itt lehet szélső érték, amennyiben $x = 1$ beletartozik az értelmezési tartományba – ti. $AE/AB = 2$, azaz $AE = 4$ esetén is.

Látható, hogy ha $0 < x < 1$, akkor $t\,'(x) < 0$, ha pedig $x > 1$, akkor $t\,'\,(x) > 0$. Másrészt $AE = 4$ esetén $m = \sqrt{14} > 1$, ezek szerint $x = 1$-ben minimuma van a területösszegnek.

II. megoldás. Alakítsuk $t(x)$ fenti első kifejezését így:

$$t\,(x) = AF\left(FM + \frac{ME}{\sqrt{2}}\right),$$

Mivel AF állandó, eszerint x-et úgy kell megválasztanunk, hogy a zárójelbeli két szakasz összege a lehető legkisebb legyen. Szemléletes jelentést adhatunk ennek a feladatnak a gúla FOE síkmetszetében. Rajzoljunk E-n át az EO magassággal 45°-os szöget bezáró EG félegyenest az F-et nem tartalmazó oldalon, és legyen ezen M vetülete M' (2. ábra).



2. ábra

A zárójel második tagja nyilvánvalóan MM', és a két tag összege az F-től EG-ig megtett utunk, ha EO-ig is és tovább EG-ig is egyenesen haladunk, az utóbbi részben EG-re merőlegesen. Ez az út nyilvánvalóan akkor a legrövidebb, ha OE átlépésekor nem változtatunk irányt, $OFM\sphericalangle = 45°$, tehát ha $OM = OF = 1$.

Holló Mihály (Budapest, I. István Gimn., III. o. t)

Megjegyzés. Az utóbbi megoldásban alkalmazott módszer eredményesen használható a következő feladatban is. Adott a síkban egy e egyenes, továbbá rajta egy B és kívül egy A pont. Határozzuk meg e-nek azt a P pontját, melyre a

$$\lambda \cdot AP + \mu \cdot PB$$

összeg minimális, ahol λ, μ tetszőleges pozitív számok.