I. forduló, kezdők (legfeljebb I. osztályosok) részére

1. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9.$$

2. Az O középpontú, 10 cm sugarú k kör érinti az ABC háromszög AB oldalát és az AC és BC oldalak meghosszabbításait. $ACB\sphericalangle=40^\circ$, $AB=16$ cm. Mekkora szögben látszik az AB oldal O-ból?

3. Határozzuk meg mindazokat a természetes számokat, amelyek oszthatók 8-cal, számjegyeik összege 8, számjegyeik szorzata 6.

4. Érintse az ABC derékszögű háromszögbe írható kör az AB átfogót a D pontban. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög területe egyenlő annak a téglalapnak a területével, amelynek oldalai AD, ill. BD.

5. Négy szám közül 3–3-nak a számtani közepét a negyedikhez adva 37, 23, 18, ill. 8 adódik. Melyik ez a négy szám?

6. Igazoljuk, hogy

$$\underbrace{66\ldots6}_{n-1\text{ db}}7^2-1=\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ db}}\;\underbrace{88\ldots8}_{n\text{ db}},$$

ahol $\underbrace{66\ldots6}_{n-1\text{ db}}7$ olyan tízes számrendszerben felírt számot jelöl, amelynek első $n-1$ db jegye 6-os, az n-edik és egyben utolsó jegye pedig 7-es.

Hasonlóan $\underbrace{44\ldots4}_{n\text{ db}}\underbrace{88\ldots8}_{n\text{ db}}$ olyan $2n$ jegyű tízes számrendben leírt számot jelent, amelynek első n jegye 4-es, az utolsó n jegye 8-as.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $n>5$, akkor bármely négyzet felbontható az oldalaival párhuzamos vágásokkal n darab négyzetre.

8. 286 vendég elszállításához 17, ill. 19 ülőhelyes gépkocsikat vehetünk igénybe. Melyik fajtából hány gépkocsit rendeljünk, hogy a megrendelt gépkocsik valamennyi ülőhelye foglalt legyen?

9. Legyenek A_1, B_1 és C_1 rendre az ABC háromszög BC, CA és AB oldalainak belső pontjai. Igazoljuk, hogy az AA_1, BB_1 és CC_1 szakaszok felezőpontjai nem lehetnek egy egyenesen.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$4^n+15n-1$$

osztható 9-cel.

11. Legyen A, B, C a sík három egymástól különböző pontja. Mi a sík azon P pontjainak mértani helye, amelyekre az ABP háromszög és a BCP háromszög területe egyenlő?

12. Bizonyítsuk be, hogy bármely $x\ge 0$ valós számra

$$\frac{x+x^2+x^3+x^4}{1+x^5}\le 2.$$

I. forduló, haladók (legfeljebb II. osztályosok) részére

1. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c, akkor

$$2(c^6-a^6-b^6)=3c^2(c^4-a^4-b^4).$$

2. Legyen AB egy körnek húrja, P a kör kerületének pontja. Mi a PAB háromszög beírt köre középpontjainak mértani helye, ha a P pont körülfut a kör kerületén?

3. Számítsuk ki az

$$A=\left(3-\sqrt{5}\right)\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}$$

kifejezés értékét.

4. Az x és y változók mely értékpárja mellett lesz az

$$F=x^2+y^2-5x+4y$$

kifejezés értéke a lehető legkisebb?

5. Milyen összefüggés van p és q között, ha az

$$x^2+px+q=0$$

egyenlet gyökeinek köbösszege egyenlő 1-gyel?

6. Van-e valós gyöke a következő egyenletnek?

$$x^4+x^3+2x^2+x+1=0.$$

7. Hosszabbítsuk meg egy négyszög oldalait, majd húzzuk meg a szemközti oldalak által bezárt szögek szögfelezőit. Bizonyítsuk be, hogy ha a két szögfelező merőleges egymásra, akkor a négyszög húrnégyszög.

8. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$(x^2-4)(x+8)=|x+2|.$$

9. Határozzuk meg az egymástól különböző A és B számjegyeket úgy, hogy az AB és BA kétjegyű számok reciprokainak különbsége $\dfrac{1}{270}$ legyen.

10. Adott egy derékszögű háromszög két súlyvonala: szerkesztendő a háromszög.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy kétjegyű páratlan szám osztható számjegyeinek összegével, akkor 3-mal is osztható.

12. Adott az AB szakasz és a szakasz belsejében fekvő C pont. Megszerkesztendő az AC szakasz belsejében fekvő P pont, úgy, hogy AP mértani középarányos legyen PC és PB között.

13. Legyen az $ABCDE$ szabályos ötszög AC átlójának felezőpontja F. Hogyan aránylik egymáshoz az $ABC\triangle$, a $CDF\triangle$ és a $DEF\triangle$ területe?

14. Egy kör kerületére öt számot írtak. Ezután mindegyik számot négyzetre emelték és a négyzetét megszorozták az óramutató járása szerint rákövetkező számmal, így a következő öt számhoz jutottak:

$$1/2,\ 1,\ 32,\ 4\sqrt{2},\ 2.$$

Mi volt az eredetileg felírt öt szám?

15. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalának az A, B, illetve C csúcshoz közelebb eső harmadolópontjai A_1, B_1, illetve C_1. Az $A_1B_1C_1$ háromszög A_1B_1, B_1C_1 és C_1A_1 oldalának az A_1, B_1, illetve C_1 csúcshoz közelebb eső harmadolópontjai C_2, A_2, és B_2. Bizonyítsuk be, hogy $A_2B_2C_2\triangle \sim ABC\triangle$.

II. forduló, kezdők (legfeljebb I. osztályosok), általános tantervű osztályok részére

1. Van-e olyan m, n számpár, ahol m, n zérustól különböző egészek és

$$\frac{2}{n^2}+\frac{3}{m^3}+\frac{4}{n^4}=0?$$

2. Legyen A_1 az ABC háromszög BC oldalának egy tetszőleges belső pontja és legyenek O, O_1, és O_2, rendre az ABC, ABA_1 és AA_1C háromszögek köré írható körök középpontjai. Igaz-e, hogy az O, O_1, O_2 és az A pontok egy körön helyezkednek el?

3. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög belsejében felvett tetszés szerinti pontnak a háromszög csúcsaitól vett távolságainak összege kisebb, mint a háromszög két legnagyobb oldalának összege.

II. forduló, kezdők (legfeljebb I. osztályosok), szakosított matematika I. tantervű osztályok részére

1. Azonos az általános tantervű osztályok 1. feladatával.

2. Egy szabályos háromszög csúcsai, oldalainak harmadoló pontjai és középpontja összesen 10 pontot határoznak meg. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is választunk ki közölük 7 pontot, ezek között található 3 olyan, hogy azok egy szabályos háromszög csúcsai.

3. Legyen P az ABC háromszög egy tetszőleges belső pontja. Messe az AP, BP és CP félegyenes a BC, AC és az AB oldalakat rendre az A_1, B_1 és C_1 pontokban. Igazoljuk, hogy a $PA_1+PB_1+PC_1$ összeg kisebb, mint az ABC háromszög legnagyobb oldala.

II. forduló, kezdők (legfeljebb I. osztályosok), szakosított matematika II. tantervű osztályok részére

1. Bizonyítsuk be, hogy ha tetszőleges a, b természetes számok esetén, a^n minden n természetes számra osztója b^{n+1}-nek, akkor a osztója b-nek. Szükséges-e a következtetéshez minden n természetes számra tudni a feltételt?

2. Bizonyítsuk be, hogyha bárhogyan is helyezünk el 11 bástyát egy 8×8-as sakktábla különböző mezőire, található közöttük legalább egy, amelyik legalább két másikat üt. (Két bástya akkor üti egymást, ha ugyanabban a sorban, illetve oszlopban vannak és közöttük nincs további bástya.)

3. Azonos a szakosított mat. I. tantervű osztályok 3. feladatával.

II. forduló, haladók (II. osztályosok), általános tantervű osztályok részére

1. Egy háromszög egy-egy oldalát és a másik két oldal meghosszabbítását érintő mindhárom „hozzáírt” kör középpontjából állítsunk a kört érintő oldalra merőleges egyenest. Bizonyítsuk be, hogy e három merőleges egy pontban metszi egymást.

2. Bontsuk valós együtthatójú tényezőkre a következő polinomot:

$$x^4 + px^2 + q,$$

ha tudjuk, hogy p és q valós számok és

$$p^2 - 4q < 0.$$

3. 627 piros és 273 kék pontot négyzet alakban 30 sorba és 30 oszlopba rendeztünk el. A piros pontok közül 2 esett a négyzet kerületére. Egy sorban fekvő szomszédos pontokat és egy oszlopban fekvő szomszédos pontokat egyenes szakaszokkal kötünk össze, így négyzetrács keletkezik. Piros pontok összekötő szakasza piros, két kék pont összekötő szakasza kék, különböző színű pontokat összekötő szakasz fekete, és fekete szakaszból 101 jött létre.

Hány piros összekötő szakasz keletkezett?

II. forduló, haladók (II. osztályosok), szakosított mat. I. tantervű osztályok részére

1. Azonos az általános tantervű osztályok 2. feladatával.

2. Egy háromszög egyik súlyvonalát tükrözzük a vele közös csúcsból induló szögfelezőre. Bizonyítsuk be, hogy a tükörkép a csúccsal szemközti oldalt a csúcsot alkotó oldalak négyzeteinek arányában osztja.

3. Egy erdőben bármelyik két fa közötti távolság nem nagyobb, mint a fák magasságának különbsége. Valamennyi fa legfeljebb 100 m magas. Bizonyítsuk be, hogy az erdőt 200 m hosszú kerítéssel körül lehet keríteni. (A fák vastagságától eltekintünk.)

II. forduló, haladók (II. osztályosok), szakosított matematika II. tantervű osztályok részére

1. Két kör közös külső érintőinek szöge α, közös belső érintőik szöge β. (Azt a szögtartományt mérjük, amelyikben a körök vannak.) Mekkora szögben látszik a külső közös érintőnek a két belső közös érintő közé eső szakasza a nagyobbik kör középpontjából?

2. Azonos az általános tantervű osztályok 3. feladatával.

3. Legyen q olyan természetes szám, amely relatív prím 10-hez. Bizonyítandó, hogy van q-nak

$$19731973\ldots1973$$

alakú többszöröse.