I. forduló

1. Tetszőleges ABC háromszögből kiindulva, állítsuk elő azt a háromszöget, amelyben a csúcsok helyvektora rendre az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ vektor. Hányszor akkora az új háromszög területe, mint az eredeti háromszögé?

2. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c számok számtani, a pozitív x, y, z számok pedig egy mértani sorozat egymást követő elemei, akkor $x^b y^c z^a = x^c y^a z^b$.

3. Az ABC háromszögben $AB = AC$. Jelölje D a BC oldal felezőpontját, a D-ből az AC-re bocsátott merőleges talppontját E, végül F a DE szakasz felezőpontját. Bizonyítsuk be, hogy az AF egyenes merőleges a BE egyenesre.

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$|x^2 - 5x + 7|^{|y|} = |y|^{|x^2-5x+7|}.$$

5. Legyen n 1-nél nagyobb természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(2 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{3}{n}\right) \cdot \left(2 - \frac{5}{n}\right) \cdots \left(2 - \frac{2n-1}{n}\right) > \frac{1}{n!}.$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

6. Összekötjük egy egyenes alagúttal a Föld 40°-os szélességi körének a 20°-os és a 70°-os keleti hosszúsági körökhöz tartozó pontjait. Milyen mélyen van az alagút legmélyebb pontja? (A Földet tekintsük olyan gömbnek, amelynek a sugara 6370 km; emlékeztetőül megjegyezzük továbbá, hogy az Egyenlítő a 0°-os szélességi kör.)

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor

$$(2 + \cos x) \cdot x > 3 \sin x.$$

8. Bizonyítsuk be, hogy ha k, m, n egymás utáni természetes számok, akkor

$$\sqrt[m]{\left(\frac{k}{m}\right)^k} + \sqrt[m]{\left(\frac{n}{m}\right)^n} > 2.$$

II. forduló

Általános tantervű osztályok részére

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x - 2y = 1, \quad x^3y + 4xy^3 = 33\,215.$$

2. Valamely háromszög csúcsai egy középpontosan szimmetrikus konvex síkidom belsejébe, vagy kerületére esnek. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög területe legfeljebb akkora, mint a (középpontosan szimmetrikus konvex) síkidom területének fele.

3. Az $f_n(x)$ függvénysorozat elemeit definiáljuk a következőképpen:

$$f_1(x) = 1; \quad f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t)\,dt, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Legyen $a_n = f_n(2)$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Matematika I. szakosított tantervű osztályok részére

1. Az $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sorozatban a_0 természetes szám, és $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Bizonyítsuk be, hogy a sorozatban van irracionális szám.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan szám, és $x_1, x_2, \ldots, x_n$ különböző egészek, akkor

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqq \frac{n(n^2-1)}{12}.$$

3. Lényegében az ÁLT. 2. feladat (fogalmazási eltéréssel).

Matematika II. szakosított tantervű osztályok részére

1. Egy urnában az $1, 2, 3, \ldots, 90$ számok vannak elhelyezve, mindegyik két példányban. Kiveszünk közülük hármat találomra. Mi a valószínűsége annak, hogy ezek egy háromszög szögeinek a fokokban kifejezett mértékszámai legyenek?

2. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számok. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük kettő, a_i és a_j $(i \neq j)$, amelyekre

$$(a_i - a_j)^2 \leq \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

3. Egy gömbi térképen a határok minden pontja 2 vagy 3 országhoz tartozik.

Azokat a határpontokat, amelyek három országhoz tartoznak, *csúcspont*nak nevezzük. A határnak két különböző csúcspont közé eső, csúcsot nem tartalmazó szakaszát *él*nek nevezzük.

Minden csúcsban 3 él találkozik.

Két ország szomszédos, ha van közös határpontjuk.

A térképet úgy színezték ki piros, sárga, kék és zöld színekkel, hogy szomszédos országok különböző színűek.

Igazoljuk, hogy páros azoknak a piros és kék színű országoknak az együttes száma, amelyek határán páratlan sok csúcspont van.

Helyesbítés. Az 1972. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek II. fordulóján, a speciális matematikai tantervű osztályok első feladatában elsőként megadott derékszög csúcsa nem B_1, hanem B_2. (K.M.L. 45/1972.) 123. old. alulról 19. sor.