A 130. sz. sportversenyen kívüli probléma[1] ekvivalens átfogalmazásban a következőképpen hangzik:

Péter és Pál kockajátékot játszanak. Pál három dobókockának a lapjait beszámozza az $1, 2, 3, \ldots, 18$ számokkal, mindegyik számot egyszer és csak egyszer felhasználva. Péter a kockákat megnézi, választ közülük egyet, majd Pál is választ a maradék kettőből egyet. Ezután mindegyikük feldobja saját kockáját, s aki nagyobbat dob, az 1 Ft-ot nyer a másiktól. Bizonyítandó, hogy Pál meg tudja úgy számozni a kockákat, hogy számára a játék előnyös legyen.

A közölt megoldás megad néhány megszámozási módot, s ezzel a feladatot teljes egészében megoldja; mégis, főképpen ha azt a megfogalmazást olvassuk, hiányérzetünk marad. Hogyan kapható ilyen megoldás? Melyik a legügyesebb megoldás? – vetődnek fel bennünk a kérdések. Célunk most a legügyesebb megszámozást megtalálni.

Jelöljük meg a kockákat az 1, 2 és 3 számokkal úgy, hogy az a kocka legyen az egyes, amelyikre az egyes szám kerül. Jelöljük azt az eseményt, hogy az egyes kockával nagyobbat dobunk, mint a kettessel, hogy a kettessel nagyobbat dobunk, mint a hármassal, hogy a hármassal nagyobbat dobunk, mint az egyessel, rendre A-val, B-vel, ill. C-vel, és legyen a valószínűségük $P(A) = p_1,\ P(B) = p_2,\ P(C) = p_3$.

Ha $p_1 \geq \frac{1}{2},\ p_2 \geq \frac{1}{2},\ p_3 \geq \frac{1}{2}$, akkor Pál nyerésének valószínűsége min $(p_1,\ p_2,\ p_3)$, mivel Péter nyilván számára a legkedvezőbben választ a kockák közül. Legügyesebbnek, legjobbnak nevezhető tehát az a számozás, melyre min $(p_1,\ p_2,\ p_3)$ a lehető legnagyobb. A közölt megoldásban láttunk olyan példát, amelyben min $(p_1,\ p_2,\ p_3) = \frac{20}{36}$.

1. Az első lépésben bebizonyítjuk, hogy $p_1 + p_2 + p_3 \leq 2$. Ezzel min $(p_1,\ p_2,\ p_3)$ értékét felülről tudjuk korlátozni, mégpedig min $(p_1,\ p_2,\ p_3) \leq \frac{2}{3} = \frac{24}{36}$.

A három kocka együttes feldobásának $6^3 = 216$ lehetséges eredménye van. Számoljuk most össze, hányszor következik be ezekből az A, a B, ill. a C esemény; pontosabban mondva, rögtön e három szám összegét becsüljük meg. Egy rögzített lehetséges eredménynél az A, B és C közül legfeljebb kettő következhet be, hiszen nem lehet; hogy mind a három dobott szám nagyobb legyen valamelyik másiknál. Ily módon az A, B és C események összesen legfeljebb 432-ször következnek be, ha végignézzük az összes lehetséges 216 kimenetelt, tehát $p_1 + p_2 + p_3 \leq 2$.

Ezentúl a $p_1,\ p_2,\ p_3$ valószínűségek helyett azok 36-szorosát, az $N_1,\ N_2,\ N_3$ egész számokat fogjuk vizsgálni. Jelölje N e számok összegét: $N = N_1 + N_2 + N_3$. Az előbb bizonyítottak szerint $N \leq 72$, s egyúttal $M = \min(N_1,\ N_2,\ N_3)$-ra is, melyet maximalizálni akarunk, felső becslést kaptunk: $M \leq 24$.

Bemutatunk egy példát arra, hogy $M = 21$ elérhető. A kockák számozása legyen:

$$\mathrm{I}: 1,\ 6,\ 7,\ 8,\ 17,\ 18;$$
$$\mathrm{II}: 3,\ 4,\ 5,\ 14,\ 15,\ 16;$$
$$\mathrm{III}: 2,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13.$$

Ez esetben $N_1 = N_2 = N_3 = M = 21$. Később más példát is fogunk mutatni.

2. A továbbiakban a megoldás kulcsa az, hogy a kockák számozását lehetőleg tömören, áttekinthetően tudjuk megadni. Ehhez a megadásmódhoz két lépésben jutunk el.

A kockák egy tényleges számozását 6 db 1-es, 6 db 2-es, 6 db 3-as szám egy permutációjával adhatjuk meg: ha e sorozat k-adik eleme pl. 3-as, akkor ez azt jelenti, hogy a k szám a harmadik kockára kerül. Tekintsünk példaként egy ilyen sorozatot:

1 1 2 2 3 2 1 1 3 2 2 1 3 3 1 2 3 3

(megállapodás szerint a sorozat első eleme mindig 1-es). Az $N_1,\ N_2,\ N_3$ értékek kiszámítása itt még elég fáradságos. Türelmesen meg kell számolni, hogy hány olyan számpár van a sorozatban, ahol a 2 megelőzi 1-et és adódik $N_1 = 16$, majd ugyanezt a 3–2 viszonylatban, végül az 1–3 viszonylatban leszámolva kapjuk, hogy $N_2 = 9$ és $N_3 = 28$.

Cseréljük fel a sorozat 4. és 5. elemét; az

1 1 2 3 2 2 1 1 3 2 2 1 3 3 1 2 3 3

sorozatban a 3–2 párok száma eggyel megnőtt, tehát $N_2 = 10$, míg N_1 és N_3 változatlan maradt. Tetszőleges kiindulásul vett sorozat ily módon feljavítható bizonyos fokig: bármely szomszédos 1–2, 2–3 vagy 3–1 pár felcserélése az $N_1,\ N_2,\ N_3$ számok egyikét eggyel növeli, míg a másik kettőt változatlanul hagyja. Ilyen cserékkel bármely sorozatból eljuthatunk egy másik, jobb sorozathoz, amelyben már 1–2, 2–3, 3–1 szomszédos párok nincsenek. A továbbiakban elég ilyen sorozatokkal foglalkoznunk. Példánkban a 2–3 párok cseréjével az

1 1 3 2 2 2 1 1 3 2 2 1 3 3 1 3 3 2,

majd a 3–1 párok cseréjével az

1 1 3 2 2 2 1 1 3 2 2 1 1 3 3 3 3 2

sorozathoz jutunk ($N_1 = 16,\ N_2 = 13,\ N_3 = 30$).

[1] Megoldását lásd K. M. L. 46 (1973) 169. oldal.

Egy ilyen sorozat még tömörebben is megadható. Mivel az ilyen sorozatok szerkezete olyan, hogy néhány kezdő egyes szám (a továbbiakban röviden: egyes blokk) után néhány hármas (hármas blokk), majd néhány kettes (kettes blokk) következik s i. t., elég azt feltüntetni, hogy egymás után hányszor ismétlődik egy-egy szám:

$$2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 1,$$

vagy betűkkel

$$(*) \qquad a_1,\ c_1,\ b_1,\ a_2,\ c_2,\ b_2,\ a_3,\ \ldots,$$

ahol a_k a k-adik egyes blokkban levő egyesek számát jelöli, s ugyanígy b_k a kettesek, c_k a hármasok számát. Nyilván

$$a_1+a_2+\ldots=b_1+b_2+\ldots=c_1+c_2+\ldots=6.$$

Természetesen e sorozat véges és elemei természetes számok.

Nézzük, hogyan számíthatjuk ki itt az N_1 értékét. Gondoljunk arra, hogy a 2–1 párok számát kell összeszámolni, és (*)-ban a b_1 szám b_1 darab kettest, a_2 pedig a_2 darab egyest jelent, tehát csupán ebből a két blokkból b_1a_2 darab 2–1 pár választható ki. Általános képlet:

$$N_1=b_1(a_2+a_3+\ldots)+b_2(a_3+a_4+\ldots)+\ldots,$$

vagy szavakkal: N_1 egyenlő azon ba szorzatoknak az összegével, ahol a b indexe kisebb, mint az a indexe.

Egy kicsit más a képlet N_2-nél és N_3-nál, ugyanis itt az azonos indexű cb, ill. ac szorzatok is számításba jönnek:

$$N_2=c_1(b_1+b_2+\ldots)+c_2(b_2+b_3+\ldots)+\ldots$$
$$N_3=a_1(c_1+c_2+\ldots)+a_2(c_2+c_3+\ldots)+\ldots$$

(Gyakorlásképpen ellenőrizzük a megadott példában az N_1, N_2, N_3 megadott értékeit!)

3. Rögzítsük most a (*) sorozat hosszát, h-t, és keressük N maximális értékét. Megmutatjuk, hogy N növelésével vagy változatlanul hagyásával a sorozat mindig átalakítható úgy, hogy az $a_1,\ a_2,\ \ldots$ sorozat elemei egy kivételével mind egyesek legyenek, majd ugyanez elvégezhető a $b_1,\ b_2,\ldots$ és a $c_1,\ c_2,\ldots$ sorozatra is.

Tegyük fel, hogy az $a_1,\ a_2,\ldots$ sorozatnak van két, 1-nél nagyobb eleme: a_k és a_l $(k<l)$. Legyen a közbeeső b-elemek összege B, a közbeeső c-elemek összege C. Ha $B>C$, akkor a_k-t 1-gyel, a_l-et (a_k+a_l-1)-gyel pótolva N értéke $(B-C)(a_k-1)$-gyel növekszik, ugyanis a 2–1 párok száma $B(a_k-1)$-gyel növekszik, az 1–3 párok száma $C(a_k-1)$-gyel csökken, míg a 3–2 párok száma változatlan marad. Ha $B\le C$, akkor a_k-t (a_k+a_l-1)-gyel, a_l-et pedig 1-gyel pótolva N értéke $(C-B)$ (a_k-1)-gyel növekszik.

Így elérhető, hogy a sorozatnak csak három eleme különbözik 1-től. Lehetőség szerint húzzuk előre a sorozatban e három elemet az előbbi második típusú átalakítással. Mert már könnyen megállapíthatók a különböző h hosszúsághoz tartozó maximális N-et adó (*) sorozatok, és így N maximális értéke is. Ezt táblázatban foglaljuk össze:

h	a maximális sorozat	N
3 és 4	tetszőleges	72
5	1, 5, 6, 5, 1	71
6	5, 5, 5, 1, 1, 1	67
7	4, 5, 5, 1, 1, 1, 1	67
8	1, 4, 5, 4, 1, 1, 1, 1	66
9	4, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1	63

N maximális értéke h növekedésével, mint azt néhány értékre a táblázatból láthatjuk, csökken (pontosabban: nem növekszik). Ezt indukcióval bizonyítani is tudjuk. Tekintsünk egy $(h+1)$ hosszúságú $(h\ge 7)$, fenti alakú maximális sorozatot, ennek végződése:

$$\ldots,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1.$$

Ha ehelyett az

$$\ldots,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1$$

végződésű, különben változatlan h hosszúságú sorozatot tekintjük, N értéke változatlan, hiszen $N_1,\ N_2,\ N_3$ közül egyik eggyel növekedett, valamelyik eggyel csökkent, s a harmadik változatlan maradt. Tehát van olyan h hosszúságú sorozat, amelyre N értéke ugyanannyi, mint a maximális N érték a $h+1$ hosszúságú sorozatokra, ami az állítást bizonyítja.

4. Most bebizonyítjuk, hogy $M\ge 22$ nem érhető el. Ehhez elég a $h\le 8$ eseteket végignézni.

A $h=8$ esetben $M\ge 22$ csak úgy lehetséges, ha $N_1=N_2=N_3=22$. Tekintsünk egy nyolc elemből álló sorozatot:

$$a_1,c_1,b_1,a_2,c_2,b_2,a_3,c_3$$

és keressük a maximális $N = 66$-ot adó sorozatokat. Nézzük először azt az esetet, amikor $b_1 > 1$ és $b_2 > 1$. Ekkor $a_2 = c_2$, különben b_1, vagy b_2 növelésével N növelhető lenne. c_1, és c_2 közül mindkettő nem lehet egynél nagyobb, mert az egyik ugyancsak növelhető lenne a másik rovására N növelésével, kivéve azt az esetet, amikor $b_1 = a_2$, de akkor előbb b_1-et kell N változatlanul tartásával megváltoztatni. Folytatva ezt a gondolatmenetet, kapjuk, hogy az a_k-k, valamint a b_k-k között csupán egy-egy négyes és két-két egyes van, továbbá $a_1 = 1$ és $c_3 = 1$ is kötelező. Ezek után két sorozattípus marad:

$$1,\ 1,\ .,\ 4,\ 4,\ .,\ 1,\ 1$$
$$1,\ 4,\ .,\ 1,\ 1,\ .,\ 4,\ 1.$$

N_3 mindkettőre kiszámítható: 27 és 12 adódik, tehát $N_3 \neq 22$. Ha $b_1 = 1$, akkor $b_2 = 5$. Az előbbi gondolatmenettel most $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 4$, majd $c_3 = 1$ adódik:

$$1,\ .,\ 1,\ 1,\ .,\ 5,\ 4,\ 1,$$

másrészt $b_1 = 5$ esetén a fordított sorozatot kapjuk:

$$1,\ 4,\ 5,\ .,\ 1\ ,\ 1,\ .,\ 1.$$

A két maximumot adó sorozat közül az elsőre $N_1 = 25$, a másodikra $N_2 = 25$. Más maximális sorozat nincs, tehát $M = 22$ $h = 8$ esetén nem érhető el.

Ha $h = 6$ vagy 7, akkor számítsuk ki N_2-t:

$$N_2 = b_1c_1 + 6b_2 = b_1c_1 + 6(6 - b_1) = 36 - b_1(6 - c,).$$

Két esetet kell megnézni: $N_2 = 22$ vagy $N_2 = 23$ lehetséges-e? Ha $N_2 = 22$, akkor

$$b_1(6 - c_1) = 14,$$

ha $N_2 = 23$, akkor

$$b_1(6 - c_1) = 13.$$

Mindkettő lehetetlen, mert mindkét tényező 1 és 5 közé kell essen.

Ha $h = 5$, akkor

$$N_1 = 6a_2; \qquad N_2 = 6c_1; \qquad N_3 = 36 - c_1a_2,$$

azaz az első két egyenlet alapján a_2 és c_1, legalább 4 kell legyen, de akkor $N_3 \leq 20$.

A $h = 4$ esetben $N_2 = 36$, ami minden további lehetőséget kizár.

Bebizonyítottuk tehát, hogy $M \geq 22$ nem érhető el. $M = 21$-re több megoldás van, ha ezek közül legjobbnak azt nevezzük, amelyre N a lehető legnagyobb, akkor a legjobb megoldás sorozata:

$$1,\ 3,\ 5,\ 5,\ 3,\ 1$$

vagy kockákra szétbontva:

$$\mathrm{I}: 1, 10, 11, 12, 13, 14;$$
$$\mathrm{II}: 5, 6, 7, 8, 9, 18;$$
$$\mathrm{III}: 2, 3, 4, 15, 16, 17,$$

mely esetben $N_1 = 25,\ N_2 = 21,\ N_3 = 21$ (és ez egyben $h = 6$-ra egy maximális sorozat). Hogy ennél jobbat nem lehet csinálni, azt a $h = 5$ esetnél elmondott diszkusszió mutatja.