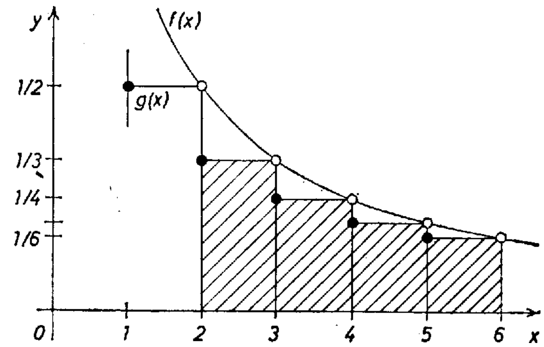
A gyökjel alatt a számlálóval egyszerűsítve, a nevezőben az $(n+1)$, $(n+2)$, …, $3n$ tényezők maradnak vissza. Mondhatjuk, hogy a gyökjel alatt e számok reciprokának szorzata áll. A tényezők száma $2n$, egyezik a gyökkitevővel, tehát a gyök az $1/(n+1), 1/(n+2), \ldots, 1/(3n)$ számok mértani közepét adja, az állítás bal oldala pedig a mértani közép $(2n)$-szerese.



Ugyancsak az $1/(n+1), \ldots, 1/(3n)$ számok adják az $1/x$ integrandusz értékeit az $x = n+1, n+2, \ldots, 3n$ helyeken. Az

$$s = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n}$$

összeg egyenlő annak a $g(x)$ (lépcsős) függvénynek az $(n, 3n)$ intervallumban vett integráljával, amely minden j természetes számra a balról zárt $(j, j+1)$ intervallumban állandó és $\frac{1}{j+1}$-gyel egyenlő. Minden $j < x < j+1$ mellett $\frac{1}{x} > \frac{1}{j+1}$, tehát a $g(x)$ függvény integrálja kisebb, mint az $\frac{1}{x}$ integrálja:

(2) $$s = \int_n^{3n} g(x)dx < \int_n^{3n} \frac{dx}{x}.$$

(Ábránk $n=2$ esetére szemlélteti a mondottakat.) Mondhatjuk tehát, hogy (2) bal oldala a mondott függvényértékek számtani közepének és a tagok számának, $2n$-nek a szorzata.

E két észrevételből már következik a feladat állítása a különböző pozitív számok számtani és mértani közepe közti ismert nagyságviszony alapján:

$$\int_n^{3n} \frac{dx}{x} > 2n \cdot \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n}}{2n} >$$

$$> 2n \cdot \sqrt[2n]{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{3n}} = 2n \sqrt[2n]{\frac{n!}{(3n)!}}$$

Egyenlőség egyik helyen sem állhat a „>” jel helyett.

Kovács István (Budapest, I. István Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Néhányan az $n!$-ra ismert $\sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ közelítő érték (Stirling-formula) alapján próbálták bizonyítani az állítást. Ez körültekintés hiányát mutatja. Nem gondoltak arra, vajon alsó vagy felső közelítő értéket használnak-e fel, tehát fennmarad-e a helyettesítés után az állításbeli egyenlőtlenség.